Б.П.ДЕМИДОВИЧ

**СБОРНИК ЗАДАЧ И УПРАЖНЕНИЙ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ**

13-е издание, исправленное

*Российской для Рекомендовано специальностей студентов в Федерации качестве математических Государственным высших учебного по высшему учебных пособия и комитетом образованию заведений физических* is\*\*

Издательство Московского университета Издательство ЧеРо 1997

ББК 22.161

ДЗО УДК 517(075.8)

*Рецензенпи* кафедра высшей математики МФТИ Печатается по постановлению Редакционно-издательского совета Московского университета Демидович В Л . ДЗО Сборник задач и упражнений по математи­ ческому анализу: Учеб, пособие. — 13-е изд., испр. — М.: Изд-во Моек, уи-та, ЧеРо, 1997.

— 624 с. ISBN 5-211-03645-Х В сборник (ll-е изд. — 1995 г.) включено свыше 4000 задач и упражнений по важнейшим разделам математического анализа: введение **в** анализ: дифференциальное исчисление фукнций одной переменной; неопределенный и определенный интегралы; ряды; дифференциальное исчисление функций нескольких переменных; интегралы, зависящие от параметра; кратные и криволинейные ин­ тегралы. Почти ко всем задачам даны ответы. В приложении поме­ шены таблицы. Для студентов физических и механико-математических специ­ альностей высших учебных заведений.

Учебное издание Демидович Борис Павлович СБОРНИК ЗАДАЧ И УПРАЖНЕНИЙ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

Зав. редакцией *Л.Л.Никаюва.* Художественный редактор *Л.В.Мухина.* Н/К ЛР М 040414 от 18.04.97. Подписано ■ печать 3.06.96. Формат 84x108/82. Бумага офсетная. Офсетяая печать. Уел. печ. л. 82,2. Тираж *6000* акз. Изд. М 6161. Заказ М 2383 Ордена “Знак Почета" издательство Московского университета 103009, Москва, Большая Никитская ул., 6/7 Издательство “ЧеРс" Москва, Большой Власьево кий пер., д. 11, к. 208 т. 241 3390, 938 2346 Великолукская городская типография Упривформпечати Псковской области, 182100, г. Великие Луки, ул. Полиграфистов, 78/12 ISBN 5-211-03645-Х © Демидович Б.П.,1996

БОРИС ПАВЛОВИЧ ДЕМИДОВИЧ (1906-1977)

ОГЛАВЛЕНИЕ

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ ФУНКЦИИ ОДНОЙ НЕЗАВИСИМОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

О т д е л I- Введение в анализ ........................................ § I. Вещественные числа ........................................ $ 2. Теория последовательностей............................ § 3. Понятие функции ............................................ § 4. Графическое изображение функции . . . . § 5. Предел функции ................................................ § 6. О-символика ........................................................ § 7. Непрерывность функции ................................ § 8. Обратная функция. Функции, заданные пара­ метрически ........................................................ § 9. Равномерная непрерывность функции , . . § 10. Функциональные уравнения............................ О т д е л II. Дифференциальное исчисление функций од­ ной переменной ................................ § 1. Производная явной функции............................ § 2. Производная обратной функции. Производная функции, заданной параметрически. Производ­ ная функции, заданной в неявном виде . . . . § 3. Геометрический смысл производной................ § 4. Дифференциал функции.................................... § 5. Производные и дифференциалы высших поряд­ ков ........................................................................... § 6. Теоремы Ролля, Лагранжа и Коши . . . . § 7. Возрастание н убывание функции. Неравен­ ства ....................................................................... § 8. Направление вогнутости. Точки перегиба . . § 9. Раскрытие неопределенностей ........................ § 10. Формула Тейлора................................................ §11. Экстремум функции. Наибольшее и наимень­ шее значения функции .................................... § 12. Построение графиков функций по характер­ ным точкам ........................................................ § 13. Задачи на максимум и минимум функций . . . § 14. Касание кривых. Круг кривизны. Эволюта § 15. Приближенное решение уравнений . . . .

771226354772778790949696

114 117 120

124 134

140 144 147 151

156

161 164 167 170

ОГЛАВЛЕНИЕ 5

О т д е л III. Неопределенный и н т е г р а л ...........................172 § 1. Простейшие неопределенные интегралы . . . 172 § 2. Интегрирование рациональных функций . . . 184 § 3. Интегрирование некоторых иррациональных функций .................................................................. 187 § 4. Интегрирование тригонометрических функций 192 § 5. Интегрирование различных трансцендентных функций .................................................................. 198 $ 6. Разные примеры на интегрирование функций 201 О т д е л IV. Определенный интеграл ..............................204 § 1. Определенный интеграл как предел суммы . . 204 § 2. Вычисление определенных интегралов с по­ мощью неопределенных ......................................208 § 3. Теоремы о среднем ..............................................219 § 4. Несобственные интегралы ..................................223 § 5. Вычисление площадей ..................................230 § 6. Вычисление длин дуг ......................................234 § 7. Вычисление объемов..............................................236 § 8. Вычисление площадей поверхностей вращения 239 § 9. Вычисление моментов. Координаты центра тя­ жести ..................................................................... 240 § 10. Задачи из механики и физики ......................242 § 11. Приближенное вычисление определенных инте­ гралов ..................................................................... 244 О т д е л V. Ряды ................................................................. 246 § 1. Числовые ряды. Признаки сходимости знако­ постоянных р я д о в ................................................. 246 § 2. Признаки сходимости знакопеременных рядов 259 § 3. Действия над рядами..........................................267 § 4. Функциональные ряды ......................................268 | 5. Степенные ряды................................................... 281 | 6. Ряды Фурье ..........................................................294 § 7. Суммирование рядов ..........................................300 § 8. Нахождение определенных интегралов с по­ мощью р я д о в ..........................................................305 § 9. Бесконечные произведения..................................307 § 10. Формула Стирлинга ..........................................314 § 11. Приближение непрерывных функций много­ членами ..................................................................315 ЧАСТЬ ВТОРАЯ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ О т д е л VI. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных ..............................318 § 1. Предел функции. Непрерывность......................318 § 2. Частные производные. Дифференциал функ­ ции ..............................................................................324 § 3. Дифференцирование неявных функций . . . . 338 § 4. Замена переменных . . . ..................................348 4 5. Геометрические приложения ..............................361 § 6. Формула Тейлора ..................................................367 § 7. Экстремум функции нескольких переменных 370

ОГЛАВЛЕНИЕ

Отдел VII. Интегралы, зависящие от параметра . . § § 2. I. § 3. Собственные Дифференцирование ственных метра. Несобственные Равномерная интегралов интегралы, интегралы, под н сходимость зависящие интегрирование знаком зависящие интеграла от интегралов параметра от несоб­ пара­ , , $ § 5. 4, Эйлеровы Интегральная интегралы................................ формула Фурье ........................ Отдел VIII. Кратные и криволинейные интегралы . § § § § § § § 2. 3. 5. 6. 7. 4. 1. § § § § § § 10. II. 12. 13. 9. 8. § § § § 14. 16. 17. 15. Многократные Поверхностные Элементы Двойные Приложения Приложения гралов Формула Формула Тройные Вычисление гралов Криволинейные Формула Физические Вычисление Вычисление Вычисление Несобственные . ................................................................... интегралы............................................ интегралы............................................ Стокса Грниа Остроградского теории .’ приложения объемов объемов............................................ площадей площадей двойных тройных ........................................................... интегралы двойные интегралы................................ интегралы поля ................................................ ................................................ с ................................ интегралов поверхностей к механике . помощью тройных интегралов и тройные ................................ ............................ к интегралы механике криволинейных ........................................ ............................ , . . . инте­ инте­ 379 379

385

392 400 404

**406** 414 406 416 419 421 424

435 439 443 428 431 452

456 460 464 466 471

Ответы 480

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

ФУНКЦИИ ОДНОЙ НЕЗАВИСИМОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

ОТДЕЛ I ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

§ 1. Вещественные числа

доказать, са числа *п* натурального принадлежащего ляет: б) *ных\*).*го вия: жащее большее числа, иррациональные число, падает *=* натурального А иррациональное 2°: 3°. 1°. 1 1) и а) *п,* и в а В то классу рациональное оба Метод Сечение. Абсолютная число достаточно 2) один класс что называется *абсолютной* что класса некоторая числа и или если *В А* только числа носят классу — математической *(нижний* же не доказать: *п,* число, эта наименьшего Разбиение *сечением,* верхний число, то пусты; п *величиной]* в название теорема теорема -j- она один *В* величина. если 1. *класс), (верхний* если справедлива 2) 1) класс класс если рациональных верна что каждое класс справедлива *вещественных х* или числа. *\* меньше выполнены эта и называется *В класс).* нижний 3) для имеет *А* теорема рациональное Если любое Числа также не индукции. всякого произвольного Сечение наименьшее имеет для класс чисел *х* или следующие число, и справедлива неотрицательное рациональные — для какого-нибудь натурального вещественное *действитель­* наибольшего *А А/В* на следующе­ имеет принадле­ число два число, опреде­ числа, Чтобы усло­ клас­ наи­ для по­ и и число, определяемое следующими условиями:

— \*, если \* < 0;

\*, если \*>0.

Для любых вещественных чисел *х* и *у* имеет место неравенство

1\*1 — lyl=Sl\* + y K |x | + |jM- ограниченное 4°. Верхняя множество и нижняя вещественных грани. чисел. Пусть Число

*X =* {\*}— *т* = inf (*х*}

называется *нижней гранью* множества *X,* если:

\*) В дальнейшем под словом ч и с л о мы будем понимать в е щ е с т в е н н о е ч и с л о , если ие оговорено противное.

ОТДЕЛ I. ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

1) каждое *х£Х* \*) удовлетворяет неравенству

\*>т;

2) каково бы ни было е > 0, существует х'€ X такое, что

*х'* < *т* + е. Аналогично число

*М —* sup {л}

называется *верхней гранью* множества X, если: 1) каждое *х£Х* удовлетворяет неравенству

*х* < *М,* 2) для любого е > 0 существует л\*£ X такое, что

*х' > М — е.*

Если множество X не ограничено снизу, то принято говорить, что inf (х) = — оо;

если же множество X не ограничено сверху, то полагают

sup {\*} = + о°- 5°. Абсолютная и относительная погрет\* и о с т и. Если *а (а* ч\* 0) есть точное значение измеряемой вели\* чины, а *х* — приближенное значение этой величины, то Д =\* |х — *а\*

называется *абсолютной погрешностью,* а

— *относительной погрешностью* измеряемой величины. Говорят, что число *X* имеет *п верных знаков,* если абсолютная погрешность этого числа ие превышает половины единицы раз\* ряда, выражаемого п-й значащей цифрой.

Применяя метод математической индукции, доказать, что для любого натурального числа *п* справедливы сле­ дующие равенства:

1. 1+2+ . . . +„ = «<1±Л.

\*) Запись \*6Х означает, что число *х* принадлежит множе­ ству X.

*i* 1. ВЕЩЕСТВЕННЫЕ ЧИСЛА 9

2. 1\*4-2\*+ . . . ,«(я41)(2в±0— 6 3. Is4-2\*4- . . . +n\* = (l+2+ . . . +«)\*• 4. 1 + 2 + 2\* + . . . + 2"-1 = 2» — 1. 5. Пусть = *a (a — h). . .* [a — *in* — 1) \* I и а») = 1.

Доказать, что (a + 6)lni= £ где С? m число сочетаний из п элементов по *т.* Вывести отсюда формулу *бинома Ньютона.* в. Доказать *неравенство Бернулли:* (1 + \*j)(l 4- лсг) . . . (1 4- *хп) >*

> 1 •+■ *xt* -+• *х%* + .«. + *хн.* где *хи хг,* . . *х„* — числа одного и того же знака, большие — I. 7. Доказать, что если *х >* —1, то справедливо не\* равенство

(1 4- *х)\* >* 1 4- *пх* (я > 1),

причем знак равенства имеет место лишь при *х* ■\* 0. 8. Доказать неравенство

я!<^ ” при я>1.

У к а з а н и е . Использовать неравенство

*(* \_£±\*\_у+| = Л н— !— Y +1 >2 , \ «+1 / V л + 1 / 2\* \* • • )•

9. Доказать неравенство

**21-41. . . (2я)! >[(я + 1)Пя при л>1,** 10. Доказать неравенство

\_\_1\_\_\_\_ з \_ 2я — 1 ^ »

2 4 2я V2n + T \* 10.1. Доказать неравенства:

а) (п>2)! **б) я"+‘ > (я + 1У (я > 3):**

10 ОТДЕЛ I. ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

**в) Г"(**1**/\*)| < Z** sin хА (0 **<** *xk* **<** гс;

^== ii 2, t • • , л)| г) (2л)!<22я(л!)\*.

11. Пусть *с* — положительное число, не являющееся точным квадратом целого числа, и *AIB* — сечение, опре­ деляющее вещественное число Vе» гДе в класс *В* входят все положительные рациональные числа *Ь* такие, что б’ ^ с . а в класс *А* — все остальные рациональные числа. Доказать, что в классе *А* нет наибольшего числа, а в классе *В* нет наименьшего числа. з \_— 12. Сечение *А/В,* определяющее число у 2, строится следующим образом: класс *А* содержит все рациональные числа *а* такие, что *а3* < 2; класс *В* содержит все осталь­ ные рациональные числа. Доказать, что в классе *А* нет наибольшего числа, а в классе *В* — наименьшего. 13. Построив соответствующие сечения, доказать ра­ венства:

a) *+J2* +V8 = б) л/2 V®" = V®"\*

14. Построить сечение, определяющее число 2 15. Доказать, что всякое непустое числовое множе­ ство, ограниченное снизу, имеет нижнюю грань, а всякое непустое числовое множество, ограниченное сверху, имеет верхнюю грань. 16. Показать, что множество всех правильных раци­ ональных дробей *т!п*, где *тип* — натуральные числа и 0 < *т* < *п,* не имеет наименьшего и наибольшего эле­ ментов. Найти нижнюю и верхнюю грани этого мно­ жества. 17. Определить нижнюю и верхнюю грани множества рациональных чисел *г,* удовлетворяющих неравенству г\* < 2. 18. Пусть {—*х)* — множество чисел, противополож­ ных числам х€{\*}- Доказать, что

a) inf{—*х)* = —sup{х}; б) sup {—х} = —inf {х}.

19. Пусть *{х* + *у)* есть множество всех сумм *х* + *у,* где х£ {\*} и *у* €{«/}.

« I ВЕЩЕСТВЕННЫЕ ЧИСЛА 11

Доказать равенства: а) inf *{х* + *у)* = inf {\*} + inf *{у}',* б) sup *{х* + *у) —* sup {ж} + sup {</}. где 20. *х£ {х}* Пусть и *у {ху}* есть причем множество *х* > 0 всех и *у* произведений > 0. *ху,* Доказать равенства:

а) inf *{ху}* = inf{x}-inf {у}; б) sup *{ху}* — sup{x}-sup *{у}.* 21. Доказать неравенства: а) *\х — у\ >* Н\*| — 1</||; б) | *х + хг +* ... + *хп* | >

> 1\* 1 —o\*ii + . •. + i\*«d: Решить неравенства: 22. | х 4-11<0,01. 23. | *х*—21 > 10. 24. |\* |> |\* + 1 |. 25. |2дс—1 |< |х —11. 26. |х+2|+|\*—2|< 12. 27. |ж + 2|—|\*|>1. 28. ||jt + l|—*\х—* 1 ||< 1 . 29. |*х* (1 *-~х)*|<0,05. 30. Доказать тождество

31. При измерении длины в 10 см абсолютная погреш­ ность составляла 0,5 мм; при измерении расстояния в 500 км абсолютная погрешность была равна 200 м. Какое измерение точнее? число 32. *х* Определить, *—* 2,3752, если сколько относительная верных погрешность знаков содержит этого числа 33. составляет Число *х —* 1 12,125 %? содержит 3 верных знака. Определить, числа. какова относительная погрешность этого 34. Стороны прямоугольника равны: *х* = 2,50 см ± 0,01 см, *у* = 4,00 см ± 0,02 см. В угольника? каких границах Каковы заключается абсолютная погрешность площадь 5 этого А и относи­ прямо­ тельная погрешность 6 площади прямоугольника, если за стороны его принять средние значения?

*V2* ОТДЕЛ 1. ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ *v —* 35. 3,2 Вес см3 тела ± *р* = 0,2 см3. 12,59 гс ± 0,01 гс, Определить удельный а его объем вес тела и оценить абсолютную и относительную погрешности удельного веса, если за вес тела и объем его принять средние 36. значения. Радиус круга *г —* 7,2 м ± 0,1 м. С какой мини­ мальной относительной погрешностью может быть опре­ делена площадь круга, если принять я = 3,14? суть: 37. Измерения прямоугольного параллелепипеда *х* = 24,7 м ± 0,2 м,

*и* = 6,5 м ± 0,1 м, *г =* 1,2 м ± 0,1 м.

В каких границах заключается объем *v* этого параллеле­ пипеда? ностями С может какими быть абсолютной определен и объем относительной этого параллеле­ погреш­ пипеда, если за его измерения принять средние значения? рить 38. сторону С какой квадрата абсолютной *х,* погрешностью где 2 м < *х* < следует 3 м, изме­ чтобы с иметь точностью возможность до 0,001 определить мг? площадь этого квадрата точно 39. измерить С какими стороны абсолютными *хну* погрешностями прямоугольника, А доста­ чтобы 0,01 площадь м2, если его можно ориентировочно было вычислить стороны прямоугольника с точностью до *ху.* чисел яе превышают 40. *х* Пусть и *у,* Доказать, б б 10 *(ху)* (\*) м и — каждая? б относительная *(у)* — относительные что б *(ху)* < б (дг) + погрешность б *(у)* + погрешности числа б *(х)6 (у).*

§ 2. Теория последовательностей

*сходится* сти. иначе 1°. Говорят, *х„(п* П к о а), *—* н я 1, т. что т и 2, е.

е последовательность . п р е д е л а . .), имеет своим п о пределом *xi,* с л *хг*..........*х„,* е д о в а число т е *а* . . л (короче, ., ь или н о ­ л-\*оо lim *хп* = *а,* если для любого е > 0 существует число *N* = *N (г)* такое, что

I *х„* — *а* | < е при л > *N.*

| 2. ТЕОРИЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ IS

В частности, *хп* называется *бесконечно малой,* если

lim *хп* \*■> 0. л-\*оо Последовательность, не имеющая предела, называется *расходя­ щейся.*2°. П р и з н а к и с у щ е с т в о в а н и я п р е д е л а . 1) Если

*Уп хп ^* а

lim *уп* = lim z„ = *с, П*—+00 П-РОО ТО

lim *хп* = с. л-too

2) Монотонная и ограниченная последовательность имеет предел. 3) К р и т е р и й К о ш и . Для существования предела последовательности *х„* необходимо и достаточно, чтобы для лю> бого е > 0 существовало число *N — N* (е) такое, что 1\*п — \*о+рКе, если' только n > *N* и *р* > 0. 3е. О с н о в н ы е т е о р е м ы о п р е д е л а х п о с л е \* д о в а т е л ь н о с т е й . Предполагая, что существуют

lim *хп* и lim *уп,* П-\*ОС Л-\*00 имеем:1) если *х„* < *уп,* то lim *хп* < lim *у„; П-+* 90 Л-МО

2) lim (х„ ± *уп) =* lim *х„ ±* lim *уп\* Я-\* оо Л—\*00 Л-\*оо

3) lim (х„уя) = lim *хп* lim *уп;* л-\*оо л-\*оо Я-\*- 00

lim *хп* 4) lim 1 *Хп = --*----------» если lim *уп ФО.* л-\*00 *Уп* Нт *Уп* Л-\*ео л-\*оо

4°. Ч и с л о *е.* Последовательность

+ (л=1. 2, . . . )

имеет конечный предел

lim (1 + “—V = е = 2,718 281 8284 . . . О»мо \ Я /

J4 ОТДЕЛ I. ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

5\*. Б е с к о н е ч н ы й п р е д е л . Символическая запись

*П-+-ЭО* lim *хп — оо* обозначает, *N* =э *N* (Е) что, такое, каково чтобы ни было Е > 0, существует число I *хп* | > Е при я > *N.*

называется подпоследовательность последовательности 6°. П р е *частичным* д е л ь н *х„* а я *пределом* (я т = о ч 1, к 2, а *(предельной* . . Число . .), если £ (или *точкой)* существует символ данной оо) ее Tpj, • • • \* Трд, , • • (I ^ Pi Pi ^ ) такая, что Л-\*» lim *хРп* = *t ерштрасса).* мере является последовательности Всякая Наименьший один конечный конечным ограниченная Если частичный этот частичный *хп*

пределом частичный последовательность предел предел данной предел (конечный (*принцип* последовательности. единственный, имеет или *Больцано* бесконечный) по то меньшей — он *Вей-* же л-\*ао lim *хп* называется *нижним пределом,* а наибольший частичный предел ее

lim *хп*

называется Равенство

*верхним пределом* этой последовательности. lim ОО *х„* П-.ЭО lim *хп* является предела (конечного необходимым или и бесконечного) достаточным условием последовательности существования *хл.*

41. Пусть

я «+1 (Л=1, 2, . . . ). Доказать, что

Л—\*оо lim *хп* = 1, определив для каждого е ;> О число *N — N* (е) такое, что

1 \*п — 1 К е, если л > *N.*

5 i. ТЕОРИЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ 15 Заполнить следующую таблицу:

: е

0,1 0,01 0,001 0,0001 • • •

*Nмалая* еслие > 42. Доказать, 0 число, (т. е. имеет *N =* что *хп (п* = предел, *N* (е) такое, равный ^то 1, 2, . . .) есть *бесконечно* 0), | *хп* указав | < е при для всякого *п> N,* а)в) *ха* г)

б) *Х„ = 2п*

*п3 +* 1

лг„ (— 1)я - 0,999я.

таблицу:

Для каждого из этих случаев заполнить следующую & 0,1 0,001 0,0001 • \* •

*N*

43. Доказать, что последовательности а) \*„ = (—1 *)пп,* б) = в) xn = lg(lgn) *(п*>2) имеют *бесконечно* число *N* бесконечный *= большими), N (Е)* предел при *п -\*■* оо (т. е. являются определив такое, что | *хп* | для > Е всякого при п > Е > 0 АЛ Для каждого из этих случаев заполнить следующую таблицу:

£ | 10 100 1000 10000 • • •

*N*44. Показать, что *хп* = л'"1’" *(п —* 1,2, . . .) не ограничена, при *п -\*■ оо.*

однако не является бесконечно большой

!б ОТДЕЛ I. ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

45. Сформулировать с помощью неравенств следую­ щие утверждения: a) limx„ = оо; б) lim *хп* = — оо; в) lim *хп—* +oo.

П -\*0 0 *П - + О О* П-\*-ОО

Предполагая, что *п* пробегает натуральный ряд чисел, определить значения следующих выражений:

46. Я-.0 Пш 0 10 000л \_

Л\* 4 \* 1 Л«\*оо 47. lim(-\//i+1 *— -\jn* ).

48. Л—\*oe

lim *■J* я1 sin fll 49. lim— + n-.oo ( — 2)n+l • 50. lim ‘ + a + ?5± .i..± fn- (]a|<i i6, . n-.oo ! + \*+\*\*+ ...+&" ’ 101^1). 51. lim

Л -\* oc*(* V Я» i i 1 я» 2 iI 1h“ - i 1 n\_1 Л\* ^ *)'* 52. lim

Л -\* OC IJ\_\_

1 n ,JL *n* + . я 3 ’ j ( - 1)"-» я 53. lim

Л-\*ос **г** L я3 12 l 2\* Я3 1 1 • 1 1 (n“ 1)2 1 J- 54. lim rt-^oo Г L я3 12 1 1 Я3 31 1 1 55. *П* lim-»oo . (2я — l)1 1 «’ J\* *(* l 2 1 + 1 22 3 1 23 5 1 1 ’ ' ' 1 1 2П- 2Л ’ ’ 56. lim Q 'X » Г L 12 l , ‘ 2-3 1 i ■ \* • i 1 я(я+ 1 1) ! J 57. lim

*n — \* o o* (V2\* V*тут*. . . *vn* Доказать следующие равенства:

E8. Л—\*oo lim —— *2n* — 0. 59, 6—►oo l i m *n\* =0. 60. *n-+oo* lim — *Qn* =0 (a>l). 61. *П-+00* lim-^-=0. /ll 62. ft—\*-oo limn(7n = 0, если |<?|<1. 63. л-\*оо lim y^a” = 1 (a>0). 64. Л-\*ос l i m - f Я e 65. lim *У n* = 1. 66. lim — -1— = 0.

= 0

66. lim

*i* 2. ТЕОРИЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ 17

ших 67. я*:* Какое выражение больше при достаточно боль­ а) 100л + 200 или 0,01л2?; б) 2" или я1000?; в) 1000" или л!? 68. Доказать, что

Указание. См. пример 10. 69. Доказать, что последовательность

монотонно вательность возрастает и ограничена сверху, а последо­ монотонно убывает и ограничена снизу. Отсюда вывести, что эти последовательности имеют общий предел

70. Доказать, что

о < г ~ 0 + - г ) " < - Г

будет отличаться 71. Пусть *рп/(п* от числа = *е* меньше чем на 0,001? 1, 2, . . .) — произвольная по­ следовательность чисел, стремящаяся к +°°, и *q„* (л = = 1, 2, . . .) — произвольная последовательность чисел, стремящаяся к — оо *(рп,* [—1, 01). Доказать, что

*П-+00* Urn (l \ + — *Рп* Y" *)* = Я-\*>СО lim V, *(* 1 *+* — *Яп J* У" = *е.*

72. Зная, доказать, доказать, что

18 ОТДЕЛ I. ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ Вывести отсюда формулу

:2Н— 2**!** — Ч— 3**!**

■— Н 1я! *п\п* (•> *Где* О < 0„ < 73. Доказать, 1, и что вычислить число *е* число иррационально. *е* с точностью до 10~5. 74. Доказать неравенство

75. Доказать неравенства:

а) *'* — Я+ 1 < Inf V 1+— *п J* )< — *п* . где *п* — любое натуральное число;

б) 1 + *а* < е®, где а 76. где In — *а* есть Доказать, вещественное логарифм что числа число, *п-+оо* Нт *а* л отличное при (а,/я основании — 1) от = нуля. In е=2,718 *а* (а > 0)', . . .

Пользуясь теоремой о существовании предела моно­ тонной и ограниченной последовательности, доказать сходимость следующих последовательностей: 77. *хп = Ро (п* = 1, 2, . . . ),

где *pi* (i =\* 0, ла, не превышающие 1 ,2 ,...) — целые 9, начиная неотрицательные с *рг.*

чис­ 78. *хп —* • 10

з

п + 9 *2п* — 1 1

Ж £-)•

8,. ,„B(l+ ^ ) ( l+ J-).,.(|+ ^\_).

81. *XiZaiJT,* \*2 = V2+V2" . • • •. *Хп =*

— */\J*2Ч-л/2 4- . . . +V2\* I . . •

n корней Пользуясь критерием Коши, доказать сходимость сле­ дующих последовательностей:

*S г.* ТЕОРИЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ 19 82. *хп* = *аа* + *atf +* . . где |а\*| < *М (k* = 0, 1, 2,

83. sin **2**

1

.. .) И |?|<1. **sin 2 2г** 84. *хп* cos 1-2 1! cos 2-3

2t

85. *Хп* = 1 2\* 3\*

cos nt « (Я + 1)

Указание. Воспользоваться неравенством

*а* (л — 2, 3, « . « ).

86. Говорят, что последовательность *хл (п —* 1, 2, . . .) имеет *ограниченное изменение,* если существует число С такое, что I *х*2 — JC х 1 “Ь I ^а *х^* | Ч- . . . Ч" | *хп* — дгл\_1 1 < С *(п* = 2, 3, ...). менением Доказать, Построить сходится. что пример последовательность сходящейся с ограниченным из­ последовательности, следовательности не 87. имеющей Сформулировать, ограниченного не выполнен что значит, изменения. критерий что для Коши. данной по­ 88. Пользуясь критерием Коши, доказать расходи­ мость последовательности

89. Доказать, что если последовательность *х„ (п* = = ность 1,2,...) *хРп* также сходится, сходится то и любая имеет тот ее подпоследователь­ же самый предел:

rt-\*oo lim *хРп=* Я-р-оо lim *хп.* 90. Доказать,- что монотонная последовательность довательность. будет 91. сходящейся, Доказать, что если если сходится lim *хп* некоторая *— а,* то ее подпосле­ lim П-\*эо |хя1 = |а|. 2\*

20 ОТДЕЛ I. ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

92. Если *хп а,* то что можно сказать о пределе

lim n-»oo / *Хп*

тельность 93. Доказать, ограничена. что сходящаяся числовая последова- 94. Доказать, что сходящаяся числовая последова­ тельность достигает либо своей верхней грани, либо своей нижней грани, либо той и другой. Построить примеры по­ *х„* следовательностей *(п* 95. *=* Доказать, 1, 2, . . .), всех что стремящаяся трех числовая типов. к последовательность + оо, обязательно достигает своей нижней грани. Найти наибольший член последовательности *хп (п* =» = 1,2, ...), если:

96. *Хп* \* ■2" 97. *хп* 100+ *п* ■■ . 98. " я!

Найти наименьший член последовательности *хп* (я =• \*\* 1, 2, .. .), если:

99. *хп = п\*—9п—* 100. 100. *х„ = п +* — 100 -.

Для inf *хп.*

**2,** . . .) найти

101**.**

102**.**

последовательности *хп* (я — 1, sup *хп,* Нш *хп* и lim *хп* . если:

\*„ = 1------- л

. 101.1. х„ = (—1)п~,^2 + -^-^.

*\*а* „ — *—* (-1)" *————*

+ , 1 + <-1)" -

103. \*„ = 1 + — Я -f- *7 п ~* 1 *r COS~~T~' п\*ь п* (д—1) 104. х„ = 1+2(— l)"+, + 3‘ (— 1) 2

105. *хп* =» -я л ~~1 + 1 ■ cos *а*

• ,06. \*п = ( 107. \*„------*Щ 2+(~1П* 108\*

109. x ^ ^ / i s m - 2^ -\* 1,0‘ п — 10,2 "

*i г.* ТЕОРИЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ 21

Найти lim *хп* и Нш *хп,* если:

111. *х. = -* 1 + *п* COS' *2пп* 112. “ ( 1+ - 7 -)" •(-!)" + \* » п -~

113. *Х„:* П + 1 sm in\* лл 114. *xn = V* 1 -f 2П,<-|)П • 118. *х„* = cosn 2лл

востей:

Найти частичные пределы следующих последователь\* 116.

2я — 1

3 1 4 ’ 8 **8** \_ » • . . » **2**"

**2я**

„т. 1+-±. 4**-** 1

1 1 4**-** 3 \*+4 3 JL **4 \*** \_L **з** j\_L **+ 4**

—— 2 1 4- ----Г- 3 1 • ■

1

\_!\_ *п* 1 . J *п* \_\_\_!\_|\_\_L *2 п* п — 1

п+1

118. — 2

, 1з ’ 2 3 4 " Т ’ 5 ’ 5 ’ о> оII с*(г—*

120. *хп* == \* *Г.* [(а+ 6 ) + ( — 1)я(а—6)]. 121. Построить пример числовой последовательности, имеющей в качестве своих частичных пределов данные числа

^4» • • •> Яр\*

22 ОТДЕЛ I. ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

122. Построить пример числовой последовательности, для которой все члены данной числовой последователь­ ности ^1» ®л! • • • являются ее частичными пределами. Какие еще частич­ ные пределы обязательно имеет построенная последова­ тельность? 123. Построить пример последовательности: а) не имеющей конечных частичных пределов; б) имеющей единственный конечный частичный пре­ дел, но не являющейся сходящейся; в) имеющей бесконечное множество частичных пре­ делов; г) имеющей в качестве своего частичного предела каждое вещественное число. 124. Доказать, что последовательности *х„* и *у„* ==■ = *хп-/~п (п —* 1, 2, . . .) имеют одни и те же частичные пределы. 125. Доказать, что из ограниченной последователь­ ности *хп (п =* 1,2, . . .) всегда можно выделить сходя­ щуюся подпоследовательность *хРп (п* = 1, 2, . . .). 126. Доказать, что если последовательность *хп (п — —* 1, 2, . . .) не ограничена, то существует подпоследо­ вательность *хв* такая, что Нш *х„ =* оо.

127. Пусть последовательность *хп* (я = 1,2,.. .)' сходится, а последовательность *уп (п* = 1, 2, . . .) рас­ ходится. Что можно утверждать о сходимости последо­ вательностей:

а) 4- *уп,* б) *хпуп*? Привести соответствующие примеры. 128. Пусть последовательности *х„* и *уп (п* = 1, 2, . . .) расходятся. Можно ли утверждать, что последо­ вательности

а) *хп* + *Уп,* б) *хпу„* также расходятся? Привести соответствующие примеры. 129. Пусть Пт *х„* = 0, и *уп (п —* 1, 2, . . .) — л-»эо произвольная последовательность. Можно ли утвер­ ждать, что Нт *х„уп* = 0? Привести соответствующие П-\* 00 примеры.

5 J. ТЕОРИЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ 23

130. Пусть

lim *х„у„ =* 0. Л—ЬЭО Следует Рассмотреть ли отсюда, пример: что *хп* либо *—* — 1 *П-+ЭО* Нш 4- *хп —* 0, ( - ------» 1)" *Уп* либо *—* ------- *П-+0О* Пт 1 - *у„=* 0? ( ------- — 1)" (« = 1, 2, . . .). 131. Доказать, что а) *П-ЮО* lim *хп* 4- *П-\*ЭО* lim *уп* < *П* lim — (*хп* + *Уп)* < *П-ЮО* Пт *хп* + lim *П-+ЭО у„* и б) lim Л-.00 *хп* + *п-too* Нт *у„* < л-»оо Tim *(х„* 4- *уп)* ^ Шп Л-.30 \*п + *п-+х* Пт *уя.* Построить примеры, когда в этих соотношениях имеют 132. место Пусть строгие *х„>0и* неравенства. *уп > 0* (/:=!, 2, . . .). Доказать, что

а) *\\mxn-\mtjn* < lim *(хпу„)* < limxn-lim *уп*

*П-+-00 я-юо П-+ао П-+* оо

б) lim *хп •* lim *у„* < lim *(хауп) <* Пт *х*„• lim *уа.* п\_^,00 Я-+-0О Л-\*00 Л-ЬЭО Л-\*00 Построить примеры, когда в этих соотношениях бы имеют 133. ни место была Доказать, строгие последовательность что неравенства. если Л-\*оо lim *х„ у„* существует, *(п* = то, какова 1, 2, ,.. имеем:

а) Пт (дс„ 4- *у„)* = Нт *хп + Шп у„* Л-Р-00 Л-ьэ© Л-^оо и

б) lim *(хау„)* = Нт *хп* • Пт *у„* (*х„* > 0). Л-\*-00 л-»оо Л-»00 ности ность 134. *х„ уп* (п=1, *(п =* Доказать, 2, 1, что если для некоторой последователь­ . ..), какова бы ни была последователь­ 2, .. .), имеет место по меньшей мере одно из равенств:

24 ОТДЕЛ I. ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

И ПИб) Шп *(хауп)* = Пт *х„* • ЙпГ *у„ (хп >0),*

Л-\*оо Л-\*оо /|«+оо то последовательность д:п — сходящаяся. 135. Доказать, что если *х„* >0 (я = 1, 2, . . .) и

Игл *хп■* ПпГ —!— = 1, Л-\* ос л-\*оо Хл то последовательность — сходящаяся.\* 136. Доказать, что если последовательность *х„ (п* = =» 1, 2, . . .) ограничена и lim *(xn+t*—х„) = 0, то ча- Л ^ ос стичные пределы этой последовательности расположены всюду плотно между ее нижним и верхним пределами: *I* = Нш *хп* и *L —* lim *х„,* п-оо я-\*“> то есть любое число из отрезка (/, *L* 1 является частич­ ным пределом данной последовательности. 137. Пусть числовая последовательность х\*, *х г,* . .. . . . . удовлетворяет условию 0 ^ *%т+п* ^ *%т* “1 " *(W>* Л=1, 2, . . .).

Доказать, что Нт —~ существует. Л-►во Л 138. Доказать, что если последовательность *хп* (л = 1, 2. . . .) сходится, то последовательность средних ариф­ метических

1я = ------ ( \* 1 + - \* 2 + « • • + \* л ) ( п = 1 , 2, . . . ) *п* также сходится и

lim \*■+.\*»+ • • ’.Ъ .Нщ *п-+оо* Л Л-\*-ос Обратное утверждение неверно: построить пример. 139. Доказать, что если Нш *хп* = + оо, то л-»оо

lim \*\* + \*» + • - • + \*». в +0о.

ов Л 140. Доказать, что если последовательность *х„* (я — = 1, 2, . . .) сходится и *хп* >0, то

lim *Vх&* . . . *ха* = Нтх„. Л-»до Л-\*Ов

$ г. ТЕОРИЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ 25 141. Доказать, что если *хп* >0 (я = 1, 2, . , то

Нш ^\*7 = Н ш 1 , Я“»оо Л \* оо Xf| предполагая, что предел, стоящий в правой части по­ следнего равенства, существует. 142. Доказать, чтоНш —-— *— е.* п-°° ^вГ

143. Доказать теорему Штольца: если в) *Уп*+1 ^ *Уп* 33 1, 2,...): б) Нт *у„= ■+* об, в) существует lim -frt1 ~ Хп,

П-МО л-»оо *Уп+ 1* — *Уп* ТО

Нш -^2- = lim J fctLT\*" . п-»оо Уп я-\*во Уп+1 — *Уп* 144. Найти:

a) lim —^-(а>1); б) Нш —\*?” . Я«4+вР А" Я 145. Доказать, что если *р* — натуральное число, то

а) Пт -!'±.Г + • - • + вР

п-м» пр+ ‘ Р + 1

1Р + 2Р+ . . . Ч-я»

*пР 7ТГ)* **2**

в) « т ' • *•-± e z = S £ L ,*\_\_\_\_\*L\_ *п-+оо nP+l* p + i 146. Доказать, что последовательность

*хп—1* Ч— Ч— Ч" • • • Ч— -----1пл (и — 1, 2, . . . 1 6 4 Я СХОДИТСЯ. Таким образом, имеет место формула

14- I I 1 = С4-1пл4-е„

где С = 0,577216 ... — так *Эйлера* и е„ -► 0 при *п* оо. называемая *постоянная* 147. Найти Нш «4-2 **V\***

20 ОТДЕЛ 1. ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ 148. Последовательность чисел *хп (п —* 1, 2, ...) определяется следующими формулами:

\* 1 = 0, *ь =* \*„ = (л = 3, 4,. . .).

Найти lim *х„. п-\*эо* 149 (и). Пусть *х„ (п* =• 1, 2, .. .) — последователь\* ность чисел, определяемая следующей формулой:

\*о>0, jcrt+i=—— Ч—-—j (л = 0, 1, 2, . . .).

Доказать, что lim д^, = 1. П-в-эо 150. Доказать, что последовательности *х„* и *у„ (п* = = 1, 2, . . .), определяемые следующими формулами:

\*1 — О, — 5, JCn+i = *‘\fxijyin , Уп+i* = — ^ »

имеют общий предел

р(а, 5) = lim *хп* = lim 11-»оо Я—►оо *{арифметико-геометрическое среднее* чисел о и 6).

§ 3. Понятие функции

1°. П о н я т и е ф у н к ц и и . Переменная р называется однозначной функцией *f,* от переменной х в данной области из­ менения X = {\*}, если каждому значению *х* £ X ставится в соответствие одно определенное действительное значение *у* = / (\*). принадлежащее некоторому множеству У = {у}. Множество X носит название *области определения* или *об­ ласти существования* функции £ *(х)\ У* называется *множеством значений* этой функции. В простейших случаях множество X представляет собой или *открытый промежуток* (*интервал)* ] *а, Ь* [ = *(а, Ь)*: в < *х* < *Ь* или *полуоткрытые промежутки*

1а, Ы =\* *(а,* Ы: *а < х* < *b,* [а, 6 [ = [а, *Ь): а* <х<6,

или *замкнутый промежуток* (*сегмент)* [а, б): в < *х* ^ *Ь,* где *а и b* — некоторые вещественные числа или символы — « ц -f оо (в последних случаях равенства исключаются). Если каж­ дому значению *х* из X соответствует одно или несколько зна­ чений *y = f,(x),* то *у* называется *многозначной функцией* от *х.* 2°. Обратная функция. Если под *х* понимать любое значение, удовлетворяющее уравнению

/ (\*) - *У.* где ***у*** — фиксированное число, принадлежащее множеству зна­

$ 1 ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ 27 жестве чений *У У* функции некоторую, *f* (л), вообще то зто говоря, соответствие многозначную определяет функцию ив мно­ *Х ш, l~4y)t*

?)ункция функция называемую или соответственно *у х — — обратной I 1~1 (х) (у)* монотонна *[,* является (\*\*) по < отношению в | строгом однозначной (л,)) при смысле, к *ха* функции > н монотонной т. *х\,* е. *f,* то *(хг) t* (\*)• обратная *>1* в Если *(хл)* том же смысле.

Определить области существования следующих фу ню ций:151. *\** у = —- 1 + — л . 152. « *J* = У*Ъх—х\* у*

*.* 153. у = (\* -2 )д Д |± ^ - .

154. а) *у* = log (х\*—4); б) y = log(x+2)4-log(x—2).

155. *у=\** д /sin (-%/лс) .

157. 0 = 1б ( 8т - 2 - ) .

**156,** *у =* ycosx2 .

**158.** *y J =* sin *S* **—** ял

**•** 159. «/ = arcsin 2л

1 + \* 160. y = arccos (2 sin x, 161. *у* =» Ig[cos(lg\*)]. 162(h). y = (x+|x|)Vxsin2JU . 163. *у* = ctg *юс* -f- arccos (2\*). 164. *у =* arcsin (1—*x) +* Ig (lg *x).* 165. *у* = (2\*)1

165.1. *у* = log2log3log4x. 165.2\* *у* = *\ f* lg tg *x .*

165.3. *у* = ^sin *2x* -f--\/sin3x (0 ^ *x* < 2л). Определить области существования и множество значений следующих функций:

166. у = У2+х—х2 . 167. *у=* lg(l—2cosx).

168. *у* = arccos — -^ а- . 169, *у* = arcsin ^lg .

**170. у = (—1)\*.** рого *K.LMN,* 171. *АС* В высота *•=* треугольник *b vi* высота которого *BD АВС NM* = (рис. 1), основание кото­ А, *—* вписан *х.* Выразить прямоугольник периметр

28 ОТДЕЛ I. ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ *Р* прямоугольника *KLMN* и его площадь S как функ­ ции от *X.* Построить графики функций *Р — Р (х)* и S = S *(х).*

172. В треугольнике *АВС* сторона *АВ* = 6 см, сто­ рона *АС —* 8 см и угол *ВАС* = *х.* Выразить *ВС* = *а* и площадь *АВС* = S как функции переменной *х.* По­ строить графики функций а = *а (х)* и S =\*= S *(х).* 173. В равнобедренной трапеции *ABCD* (рис. 2), основания которой *AD — а* и *ВС — Ь (а >Ь),* а высота *ИВ = h,* проведена прямая *MN* || *НВ* и отстоящая от

вершины *А* на расстоянии *AM* = *х.* Выразить пло­ щадь *S* фигуры *ABNMA* как функцию переменной ***х.*** Построить график функции: *S* = *S (х).* 174. На сегменте 0 < *х* < 1 оси *Ох* равномер- *г о* распределена масса, равная 2 г, а в точках этой оси *х* = 2 и *х* = 3 находятся сосредоточенные массы п>1 г в каждой. Составить аналитическое выражение

$ 3. ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ 29 функции *т = т (х)* (— <х> < *х с* + °о), численно равной массе, находящейся в интервале (—оо , *х),* и построить график этой функции. 175. Функция *у —* sgn *х* определяется следующим образом: — 1, если ж<0;

sgnx = 0, если ж = 0; 1, если ж>0. Построить график этой функции. Показать, что

| *X* I = *X* sgn *X.* 176. Функция *у \*= lx* 1 (*целая часть* числа *х)* опре­ деляется следующим образом: если *х — п + г,* где *п* — целое число и 0 < *г* < 1, то [ж] = *п.* Построить график этой функции. 177. Пусть *у — п (х)* (ж > 0) обозначает число простых чисел, не превышающих

числа *х.* Построить график этой функции для значений аргумента 0 < *х* < 20. На какое множество *Еу* отображает множество *Е„* функция *у =* / (ж), если:

178(h). *у* ***— &,*** *Ех* ***= {***—1 < ж < 2). 179. ***y =*** *\gx, Ех* =\* (1 0 < ж < 1000}.

**180.** *y = -^-arctgx,* **£, = {—<»<\*< + оо}.**

181. «/ = ctg-— , *Ех = {*0<|ж|<1).

182. (/ = |ж|, Еж = {1 < |ж| <2}. Переменная ж пробегает интервал 0 < \* < 1. Ка­ кое множество пробегает переменная *у,* если:

183. *у=а+(Ь—а)х.* 184. *у —* — -— . 1 —X

185. у— 186. у=

187. *у* —ctg лж. 188. у = ж + [ 2xJ.

30 ОТДЕЛ t. ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ 189. Найти / (0), / (1), / (2), / (3), / (4), если / (х) - в= X1\_6х3 + 1*1хг—&х* 190. Найти / (— 1), / (— 0,001), / (100), если / (х) - «= lg (х4). 191. Найти /(0,9), /(0,99), /(0,999), /(1), если / (х) = 1 + (х]. 192. Найти / (— 2), / (— 1), / (0), / (1), / (2), если

| 1+х при — оо < х < 0, /(\*) — | 2\* при 0 < х < + оо. 193. Найти /(0 ), / ( — х), / ( х + 1 ) , / ( х ) + 1 , **'(**4**-)-Tir' есл“**

1—X /(\*)“ ■ 1 -1-х

194. Найти значения *х,* для которых: 1) / (х) = 0} 2) / (х) > 0; 3) / (х) < 0, если:

а) /(х) = х—х\*; б) /(x) = sin— ;

**в) /(х) = (\*+1\*1)(1-\*).**

195. Найти ф(х) = ■ ■ ^—— —, если: *h*

а) / (х) = ах + 6; б) / (х) =» х\*; в) / (х) = а\*. 196. Пусть / (х) = ах2 + *Ьх* + с. Показать, что

/ (х + 3) - 3/ (х + 2) + 3/ (х + 1) - / (х) -в 0 197. Найти целую линейную функцию / (х) « *ах* + Ь, если / (0) = — 2 и / (3) — 5. Чему равны / (1) и / (2) *(линейная интерполяция*)? 198. Найти целую рациональную функцию второй степени: / (х) = ах4 + Ьх + с, если

/ ( - 2 ) « 0 , /(0 ) = 1, /(1 ) - 5. Чему равны / (— 1) и / (0,5) *(квадратичная интерпо• ляция*)? 199. Найти целую рациональную функцию третьей степени: /(х) = ax\*+bx\* + cx+d,

если / (— 1) — 0, / (0) = 2, / (1) = — 3, /(2) = 5.

« 3. ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ 31 200. Найти функцию вида / *(х) — а* 4- *Ьс\*,* если / (0) 201. = 15, Доказать, / (2) 30, что /(4) если - для 90. линейной функции / (х) •» *ах + Ь*

значения аргумента *х* = *х„* (л = 1, 2, . . .) образуют арифметическую чения функции *tjn* прогрессию, *— f* (*х*п) *(п* то = соответствующие 1, зна­ 2, . . .) образуют также арифметическую прогрессию. 202. Доказать, что если для показательной функции

/ *(х)* = а\* (а > 0)

значения аргумента *х •=\* хя (п* = 1, 2, ...) образуют арифметическую чения геометрическую функции прогрессию). *уп* прогрессию, = 203. Пусть функция /(\*„) *(п* то = соответствующие 1, *f (и)* определена зна­ 2, . . .) образуют при 0 < « <1. Найти области определения функций:

a) /(sin дс); б) / (In х); в)

204. Пусть /(jc) = -~(<ij!+a~jr) (a>0). Пока­

зать, что

*f (х + у) + f (х—у)* = 2/ (\*) / *(у).*

205. Пусть / *(х) + f* (*у)* = / (г). Определить г, если

а) /(дс)=сг, б) /(х) = - р

в) /(\*) = arctg*х* (|\*|<1); г) /(\*) = log'TZT-\*

если:Найти <р [<р (дс) I, ф [ф (х) ], <р [ф *(х) ]* и ф (ф (\*)1,

200. ф (лг) = JC® и ф(х)ах2\*.

207. Ф *(х) =* sgn *х* и ф (\*) = -I*X*

0 при\*<0, *х\** при х > 0 .

32 ОТДЕЛ I. ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

209. Найти / I/ (х) J. / {/ I/ (\*) О\* если

/(\*) = ■ 1

210. Пусть *fa* (х) —/ ( / ( . *..f(x))):* Найти /„ (х), если

I» р\*э

*Н\*— 7Т$Т--* 211. Найти / (х), если / (х + 1) == х\*—Зх + 2.

212. Найти /(х), если / ( х + - ^ - ) = х»+ - ^ - ( | х | > 2).

213. Найти/(х), если / = x+VH- x\* (х>о).

213.1. Найти /(х), если =

Доказать, что следующие функции являются моно- тонно возрастающими в указанных промежутках»

214. /(х) = х\* ( 0 < х < + оо).

215. /(x) = sinx ( ----

216. /(x)=tgx ( ----^ -< х < -^ -).

217. /(x) = 2x-f-sinx (—-oo < \* < + oo).

Доказать, что следующие функции являются моно­ тонно убывающими в указанных промежутках;

218. /(\*) = ха (— оо<х<0). 219. / (х) = cos х (0 < *х* < л). 220. /(х) =ctgx (0<х<л).

221. Исследовать на монотонность следующие функ­ ции:а) /(х)=ох+&; б) *f(x) = ax\*+bx+cti*

в) /(х)=х\*; г) f(x) = -^ ± ^ -; cx + d д) /(х)=а\* (о>0).

*i* 3. ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ 3S 222. Можно ли почленно логарифмировать нера­ венство? 223. Пусть <р (х), ф (х) и *f* (х) — монотонно возрас­ тающие функции. Доказать, что если

ф W < / *(х)* < Ф *(х),* то

ф 1<р (jc) 1 < / I/ (\*)1 < ф 1ф (\*)].

Определить обратную функцию *х* = ф *(у)* и ее об­ ласть существования, если:

224. г/ = 2х+3 (—оо<х< +оо). *225. у=х\*\* а) •—оо<дг<0; б) 0 < х< + оо.

226. *у =* -|~х- (х#-1).

227. *у = ^ \ — хг \* а) — 1 < х 0 ; б) 0 < х «5 1

228. *у =* shx, где *%\\x = J — (ex — e~x)*

(—оо<х< *+оо).*

229. u = thx, где thx=--e,~ g *\* ех + е~х* ( — оо<х< +оо). 230. ***(****х,* если —оо<х< 1;

*х2,* если 1 < *х* <; 4;

*2х,* если 4 < х < + оо.

231. Функция / *(х),* определенная в симметричном интервале (— /, /), называется *четной*, если

/(-\*) = /(\*); и *нечетной,* если

/ ( - х) = - / *(х).*

Определить, какие из данных функций / (х) являются четными, а какие нечетными:

а) /(\*) = 3\*—ж3; б) /(х) = у '(1—х)2 +>/(1 +х)\*;

34 ОТДЕЛ I. ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

в) *f{x) = ax+ arx* (а>0); г) /(\*) *-* In **\* -г \*** д) / (л:) = In (дс+уЦ -\*2)- 232. Доказать, что всякую функцию *f (х),* опреде­ ленную в симметричном интервале (— /, /), можно пред­ ставить в виде суммы четной и нечетной функций. 233. Функция / (\*), определенная на множестве *Е,* называется периодической, если существует число *Т* > О (период функции — в широком смысле слова!) такое, что *f(x±T) = f (х)* при *х £ Е.* Выяснить, какие из данных функций являются пе­ риодическими, и определить наименьший период их, если:а) *f(x) = A cosXx + B* sink\*;

б) /(\*) = sin\*-f —^— sin 2де—^-sin3x; 2 3 в) /(x) = 2tg-^-----3tg— ; г) *f(x) = smt x\ 2* о д) /(jf) = sinX\*; е) /(\*) = У tgx; ж) f(\*) = tg У\*\*; з) / (х) = sin х -f sin(хд/2~).

234. Доказать, что для функции Дирихле

J 1, если *х* рационально, XW —| Q( если *х* иррационально, периодом является любое рациональное число. 235. Доказать, что сумма и произведение двух пе­ риодических функций, которые определены на общем множестве и периоды которых соизмеримы, есть функ­ ции также периодические. 235. !. Функция / (х) называется *антипериодической,* если *f{x+T) = ~f(x) (Т* > 0). Доказать, что *f (х)* — периодическая с периодом *2Т.* 236. Доказать, что если для функции *f (х)* (— оо <; •< *х* •< 4- «>) выполнено равенство *f (х* 4- *Т) = kf (х),* где *k* и *Т* — положительные постоянные, то / *(х)* = = *ах(р (х),* где *а* — постоянная, а <р (х) — периодиче­ ская функция с периодом *Т.*

« 4. ГРАФИЧЕСКОЕ ИЗОБРАЖЕНИЕ ФУНКЦИИ 35

§ 4. Графическое изображение функции

1°. Для построения графика функиии *у — f (х)* поступают следующим образом: 1) определяют область существования функции: *X* = {\*}; 2) выбирают достаточно густую сеть зна­ чений аргумента *хи х.*............*....* из X и составляют таблицу соответствующих значений функции

(t = 1, 2...........*п*); 3) наносят систему точек Л4< *(х/, yi) (i—* 1.2,..., п) на коор­ динатную плоскость *Оху* и соединяют их линией, характер ко­ торой учитывает положение промежуточных точек. 2=. Чтобы получить грамотный график функции, следует изучить общие свойства этой функции. В первую очередь нужно: 1) решив уравнение / (х) = О, определить точки пересечения графика функции с осью *Ох* (*нули функции);* 2) установить области изменения аргумента, где функция положительна или отрицательна; 3) если возможно, выяснить *промежутки монотонности* (возрастания или убы­ вания) функции; 4) изучить поведение функции при неограни­ ченном приближении аргумента к граничным точкам области существования функции. В этом параграфе предполагается, что свойства простейших элементарных функций — степенной, показательной, тригоно­ метрических и т. п., известны читателю. Пользуясь этими свойствами, можно, не проделывая боль­ шой вычислительной работы, сразу рисовать эскизы графиков многих функций. Другие графики иногда удается свести к ком­ бинации (сумме или произведению и т. п.) этих простейших графиков. 237. Построить график линейной однородной функции

*У = ах* при *а =* 0; 1/2; 1; 2; — 1. 238. Построить график линейной функции

*у* = *х* + *Ь* при *Ь =* 0, 1, 2, — 1. 239. Построить графики линейных функций:

а) ^ = 2х + 3; б) г/ = 2—0,1\*; *у =* ------^-----1.

240. Температурный коэффициент линейного расши­ рения железа *а=* 1,2-10"®. Построить в подходящем масштабе график функции / = / *(Т)* (— 40° < *Т* < 100°), где *Т* — температура в градусах и / — длина железного стержня при температуре *Т,* если / = 100 см при *Т —* 0°. 3\*

*зе* ОТДЕЛ 1. ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ 241. На числовой оси движутся две материальные точки. Первая в начальный момент времени / = 0 на­ ходилась на 20 м влево от начала координат и имела скорость *vt* = 10 м/с; вторая при / \*\* 0 находилась на 30 м вправо от точки *О* и имела скорость о, = = — 20 м/с. Построить графики уравнений движений этих точек и найти время и место их встречи. 242. Построить графики целых рациональных функ- ций 2-й степени *(параболы):*

а) *у — ахг* при а=1, 1/2, 2, —1; б) *У = (х—*\*о)\* при \*0 = 0, 1, 2, —1; в) *у — &+с* при с = 0, 1, 2, —1. 243. Построить график *квадратного трехчлена*

*у* ■» *ах\** + *Ьс* + *с,* приведя его к виду*у* - *у»* + *а* (\*—\*0 )\*•

Рассмотреть примеры: а) г/= 8х—2\*\*; б) г/=\*\* —- Зх+2;

в) «/=—дс\* + 2х—1; г) *у\*\*-~-*лс\*-+-лсЧ-1.

244. Материальная точка брошена под углом а = 45° к плоскости горизонта с начальной скоростью = = 600 м/с. Построить график траектории движения и найти наибольшую высоту подъема и дальность по­ лета (приближенно считать *g* да 10 м/с\*; сопротивле­ нием воздуха пренебречь). Построить графики целых рациональных функций степени выше второй:

245. у = х\*+1. 246. 0 = (1—х\*)(2+х). 247. *у* = дс\*—х4. 248. *у ~ х ( а — х)\*(а + х)9 (а>*0). Построить графики дробно-линейных функций *(ги­ перболы):*

249. у = — . 250. *y = -L~x ..*

251. Построить график дробно-линейной функции

*У\*\** \*\*'х у *(ад— Ь с ф*0, с^О), сх -J- а

f 4. ГРАФИЧЕСКОЕ ИЗОБРАЖЕНИЕ ФУНКЦИИ 37 приведя ее к видуУ«Уо +

Рассмотреть пример *у--*

*т*

*x — xt*

**3x-f2** 252. Газ при давлении о0 = 12 м®. Построить газа в зависимости от газа остается постоянной давления график *р0 (закон* — *2х* 1 **—** кгс/ма **3** изменения *р, Бойля—Мариотта\* если занимает температура объема объем *v* Построить графики дробных рациональных функций;

253. *у = х* 4 1 254. *у = х\**

255. *у — х* 4

(гипербола).

(трезубец Ньютона).

‘ •(кривая Аньези),

(серпантин Ньютона).

259. *у =* I — \*\*

1

261. </ =

1

256. *у-.* 1

257. </ =

14-\*\* 2\*

258. *у = -*

260. *у =*

14-\*\* 1 1 —\*»

1 1 *»г* 1

1 —\* 1 1 4- \* \*\*

(\*+!)(\*-2)

1 —\*

262. *у -.* (\*-1)(\*4-2)

263. Построить эскиз графика функции

*У = - ах\** oi\*4- **4-** *Ьх* **4-** *bi* **с** *(at Ф* 0), приведя ее к виду*y = kx+m- х —* \*«

33 ОТДЕЛ I. ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

Рассмотреть пример

притяжения расстоянии = ального Ю 265. 264. кгс Согласно Построить газа при *х F* и *х* от его материальной = закону притягивающего давление 1 график м *(закон Ван-дер-Ваальса* абсолютной *р Ньютона*). при точки, постоянной центра, находящейся величины объем если темпера­ *о* силы *F* ре­ на => туре связаны соотношением

*(р+-^~)(о—Ь)=с.*

*Ъ —* Построить 0,1 и *с —* график 10.

функции *р =р (о),* если *а = 2* Построить графики иррациональных функций: 266. *у =* ± V *—х*—2 (парабола). 267. *у--±.х-\[х* (парабола Нейля).

268. *у = ±* УЮО—ха (эллипс).

269. *у=±* У\*2—1 (гипербола).

270. . 271. *у=±х* У 100—х\*.

(циссоида).

273. у ^ у ^ - П ф - х \* ) . 274. при: а) *п* Построить = 1, 3, 5; график б) *п* = степенной 2, 4, 6. функции при: 275. а) л Построить =\* — 1, — график 3; б) л степенной = — 2, — функции 4. *у — хР у* = х" 276. Построить a) m = 2, 4; б) *т* график = 3, радикала 5. *у = Y~x* при: 277. Построить график радикала у = Ух\*", если: а) г) ж) *т т* m \*\* = =» 4, 2, 3, *k k k* = *=* = *3.*

2; 1; б) д) m *т* = = 2, 3, £ *k* = *=* 3; 4; в) е) *т т —* = 3, 4, *k k* = =» 2; 1;

*i* 4. ГРАФИЧЕСКОЕ ИЗОБРАЖЕНИЕ ФУНКЦИИ 39

278. Построить график показательной функции *у* \*» *а\** при *а—Ш,* 1, 2, *е,* 10. 279. Построить график сложной показательной функ- ции *у = еу\* если:

а) *У1 = хг;* б) *У1= — хг-,* в) *у1= — \ X* **Г)** *Ух = -±г\* **Д)** *Уг =***--------е) Л = 7 ^ Г ‘**

280. Построить график логарифмической функции *у* = logo\* при *а* = 1/2, 2, *е,* 10. 281. Построить графики функций:

а) *у* =\* 1п (— *х);* б) *у* = — In *х.* 282. Построить график сложной логарифмической функции *у* = In *уи* если:

а)у,= 1+ \*2; б) *У1* = (\*-1) (\*—2)2 *(х*—3)\*;

а) *—* г) г/х = —!г 5 < й - 1 + Л

283. Построить график функции *у —* log,. 2. 284. Построить график функции *у — A* sin \* при Л = 1, 10, —2. 285. Построить график функции *у* = sin (\*—\*„), если *х0 —* 0, я/4, я/2, Зл/4, я. 288. Построить график функции *у —* sin *пх,* если *п* = 1, 2, 3, 1/2, 1/3. 287. Построить график функции

*у* = *a* cos \* + *Ъ* sin \*, приведя ее к виду*У =\* A* sin (\*—\*„).

Рассмотреть пример: *у =* 6 cos \* + 8 sin \*.

Построить графики тригонометрических функций:

288. *у* = cos л:. 289. *у — \gx.* 290. *у* = ctg х. 291. *у —* sec х. 292. *у — esc х.* 293. t/ = sin\* *х.* 294. *у —* sin3\*. 295. *у —* ctg2\*. \_\_\_\_\_\_ 296. *у* = sin x-sin 3\*. 297. *у —* ± УсоГхГ

40 ОТДЕЛ I. ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ .

Построить графики функций:

298. *у* = sinJt\*. 299, y = sin——. 300. *у =* cos — . *х х*

300.1. u = sinx. sin-i-. 301. u = t g . \* \*

301Л. у = sec —5—. 302. *y = x* ^2+sin -j-^.

303. i/ = ± V i t s i n 304. *y^-^JL*

*X X* 305. *y = e\** cosjf. 300. i/ = ± 2\_Jt Vsinju .

307. *y ^ - f ~ ,* 308. *у* = In (cos *x).*

309. *у* = cos (In \*). 310. *y = el'slax.* Построить графики обратных круговых функций: 311. *у =* arcsin *х.* 312. *у* = arccos *х.* 313. *у* = arctg *х.* 314. *у —* arcctg *х.*

315. *у=* arcsin *X* 310. *у* = arccos 1 1 « *X*

317. *у* = arcctg—^-. 318. *у* = arcsin (sin*х).*

319. *у —* arcsin (cos *х).* 320. *у* = arccos (cos *х).* 321. *у* = arctg (tg *х).* 322. *у =* arcsin (2 sin *х).* 323. Построить график функции *у —* arcsin *y lt* если: . , *х 2х* а) — ; б) 1\* = - ^ ;

в) ; г) *у1 = ех.*

324. Построить график функции *у* = arctg *уи* если:

а) 1/1 = \*\*; б) й = — в) *ух-^шх,*

\_1\_\_ sin\* Г) У1 =

f 4. ГРАФИЧЕСКОЕ ИЗОБРАЖЕНИЕ ФУНКЦИИ 4!

324.1. Построить графики функций:

а) *у* = ж3—Зж+2; б) *у =*

в) *У =* 1\*1-»

(1-\*)(» + \*)»

г) *у = л/х(\—х\*)* ;

д) у = з sin е> *y= cte—*

*пх* + ж\* \*

ж) *У=* , \_ y/i-x :

**з) t/ = Ig(\*J—Зх+** 2**;;**

и) у = arcsin^-|-----sin\*^;

к, y= a,ctg ( - ^ + \_ !T + \_ X -);

л) У = logos ж Sin Г, м) I/ = (sin ■\*)“\* \*.

фики 325. функций:

Зная график функции *у* = / (ж), построить гра­ а) *у* = — / (\*); б) у == / (— дг); в) *у* = — / (— ж). 328. Зная график функции р ■» *f* (ж), построить гра­ фики функций:

а*) У = f (х—х0); б) у = у0 + f* (ж—ж«); *в) у = f* (2ж); г) *у = f(kx+ Ь) {к ф* 0). 328.1. Пусть

/ 1—1ж| при |ж|<1; , И " ( « при |лг|>1.

Построить графики функций:

при / = 0, *t* = 1 и / = 2. 327. Построить графики функций:

a) p= 2 + y i—ж': б) у= 1 —е-\*; а) р=1п(1+ж); *г) У = —* arcsin (1 + ж); Д) *у* = 3 + 2 cos Зж.

42 отдел I. ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ 328. Зная график функции *у* \*\* / (л), построить гра­ фики функций:

а) Р = |/М1; б) у = -±-(|/(х)|+/(х));

в) У = 4 "(|/(ДГ)|~ /(Х))\* 329. Зная график функции # = / (х), построить гра­ фики функций:

а) *У=Р(хУ,* б) y=V rW ; в) *y=\nf* (х); г) *y = f(J* (\*)); Д) *y = sgnf* (х); е) у = 1/ (х)]. 329.1. Пусть / (х) = (х—о) (&—х) (а < *Ь).* Построить графики функций:

а) \*/=/(\*); б) у = Р(х); в) =

г) y=VTW ; д)у==«,('); е) //=igf (\*); ж) у = arcctg/ (х).

329.2. Построить графики функций:

а) у = arcsin [sin/1 (х)]; б) y = arcsin|cos/(x)]; в) *у* = arccos [sin *f* (х)]; г) у = arccos Icos *f* (х)]; д) *у* = arctg [tg/ (х)],

если: 1) *f* (х) = х\*; 2) *f* (х) = х\*. 330. Зная графики функций *у —* / (х) и *у — g* (xj, построить графики функций:

а) *у* \*= / (х) + ^ W; б*)y = f(x)g* (х); в) р =\* / (g (х)).

Применяя правило сложения графиков, построить графики следующих функций: 331. р = 1+х+е\*. 332. р = (х + 1)“\*-f-(дс—1)“\*. 333. p==x+$inx. 334. *у = х +* arctgх.

335. *у ~* cos х —-— cos 2х -]—— cos Зх.

336. p = sinx— — sin3x-j—-sin5x.

$ 4. ГРАФИЧЕСКОЕ ИЗОБРАЖЕНИЕ ФУНКЦИИ 43 337. *у =* sin4х+ cos4\*. 338. у = |1— х| + | 1+х|. 339. *у = \\ —* \*|—|1+х|. 340. Построить графики гиперболических функций:

а) *у —* chx, где ch дс = -i- *(е\** + *е~х)\*

б) y = shx, где shx= *е~х);*

в) *у =* thx, где thx = - ^ - . ch *х*

Применяя правило умножения графиков, построить графики функций:

341. y = xsinx. 342. *у = х* cosx.

343. у —x2sin2x. 344. *у* = -.

345. *у = ег\**cos2x. 346. *y = xsgn* (sinx). 347. y = [x]|siniu|. 348. jr = cos x-sgn (sinx).

349. Пусть. , I l—|\*l. «'•та |\*l< 1;

1 0, если |x |> l.

Построить график функции

*У — f (\*) f* (*a—x*), если:a) *a* = 0; 6) a = 1; в) *a* = 2.

350. Построить график функции

*у = x + 'y/xsgn* (sin ях).

Построить график функции *У-* Ж если: 351. *f* (х) = х2 (1-х2). 352. / (х) = х (1— х)2. 353. *f* (х) = sin2x. 354. / (х) = 1п х. 355. / (х) = e\*sin х. 356. Построить график сложной функции *у* = / («},

44 ОТДЕЛ I. ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ где *и* « 2 sin *х,* если:

/(И)

— 1 при — 0 0<и < — 1;

*и* при — 1 < *и* < 1; 1 при 1 < *и* < + °°\* 357. Пусть

<р(\*)=-1-(\*+|\*|) и если

если х > 0 . Построить графики функций: а) ***у*** — ф 1<р (\*)); б) *у* = <р [ф (х) Jj в) ***у*** \* Ф 1«р (\*)); г) *у* — Ф 1ф (jc) ]. 358. Пусть

1, если |\*| < 1; О, если |х|>1, и

ф(\*) =**■К**г—\*", если если |\* |> |\*| 2 .

<2;

Построить графики функций:

а) ***у*** \*= Я» 1<Р (\*) J; б) *у* - <р 1ф (\*) ]; в)у **= Ч>1ф(\*)1; г)у = ф[ф(\*)1.**

области 359. \* > Функцию 0, продолжить / (х), определенную в отрицательную в положительной область х < 0 таким образом, чтобы полученная функция была: 1) четной; 2) нечетной, если:

а) /(\*) = 1 —\*; б) *f(x) = 2x—*\*\*; в) f(\*) = V\*; г) /(\*)=sinx; д) /(\*) = е‘; е) f(x) = lnx.

Построить соответствующие графики функций. осей 360. симметричны Определить, графики относительно функций:

каких вертикальных а) *y=ax?-j-bx+ci* б) + ■■■■” , ■;

в) *у = л/а+х +л/Ь—х* (0*<а<Ь);* г) *y=a+b* cos\*.

f 4. ГРАФИЧЕСКОЕ ИЗОБРАЖЕНИЕ ФУНКЦИИ 48 391. Определить, относительно каких центров сим­ метричны трафики функций:

*я) у — ах* +6; б) сx + d в) *y = ax? + b&+cx+d\*

Д) *У* =\* *l+Vx—2 .* 392. Построить графики периодических функций: а) у» | sin х|; б) *у* = sgn cos *х;* в) *у —* / (х),

где / (л) \*» *А* -у-^2— у-)» если 0«^х<2/и/(х + 2/)еэ

\*\* / (ж);

**Г)** »-M -S **[-§■ ]:**

*я) у —* (х), где (х) — расстояние от числа *х* до бли­ жайшего к нему целого числа. 393. Доказать, что если график функции *у* =» ■\* *f (х)* (— оо < *х* < + оо) симметричен относительно двух вертикальных осей *х = а* и *х — Ь (Ь* > *а),* то функция / (х) — периодическая. 394. Доказать, что если график функции *у* = = *f* (х) (■— **оо** < *х* < + **оо)** симметричен относительно двух точек *А (а, у0),* и А *(Ь, ух) (Ь* > а), то функция / (х) есть сумма линейной функции и периодической функции. В частности, если *у0* = *y lt* то функция / (х) — периодическая. 395. Доказать, что если график функции *у* =» «\*/ (х) (— оо < х < + оо) симметричен относитель­ но точки *А (а, у0)* и прямой х = *Ь (Ь Ф а),* то функ­ ция / (х) — периодическая. 396. Построить график функции *у =* / (х) (— оо < < х < + оо), если / (х + 1) = 2/ (х) и / (х) = х (1—х) при 0 < х < 1. 367. Построить график функции *У* •\* *fix)* (— оо < х < + оо)', если/ (х + я )\* / (х) + sin х и / (х) ■\* ОприО < *х* <я.

ОТДЕЛ I. ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ 368. Построить график функции *у — у* (х), если:

а) *х=у* —z/3; б) х = - ; l+jr в) *х = у* —*\пу\* г) x\* = siny. 369. Построить графики функций *у — у* (х), задан­ ных параметрически, если:

а) х = 1—/, *у* = 1—/\*;

б )x = / + -i-, *y = t + -^-;*

в) х = 10 cos ***t,*** *у* = sin / (эллипс); г) x = ch /, *у —* sh / (гипербола)'; д) х =\* 5 cos\* /, *у* = 3 sin\*/; е) х — 2 (/—sin ***t),y—*** 2 (1—cos /) (циклоида);

ж) x = '+yT, *y = \/rt+* 1, (/>0).

370. Построить графики неявных функций: а) х*\*—ху* + *уг* = 1 (эллипс); б) х\* -f- *у*3—Зх^ = 0 (декартов лист);

в) Vх + Vtf = 1 (парабола); г) x2/3-f-0 \* /3 = 4 (астроида); д) sin х = sin *у;* е) cos (лх\*) = cos *(пу);* ж) х» = у\* ( х > 0 , 0 > 0); з) х— |х| = *у—\у\.* 370.1. Построить графики неявных функций: a) min (х, *у) —* 1 ; б) max (х, *у)* = 1; в) max 0 x 1, |у|) = 1 ; г) min (х\*, *у)* = 1 . 371. Построить графики функций *г — г* (ф) в поляр\* ной системе координат (г, ф), если: а) *г —* Ф (спираль Архимеда);

*б) г =* — (гиперболическая спираль); <Р в) г = — (0 < ф < + оо); фт \* г) *г* = 2Ф/\*Я (логарифмическая спираль); д) г = 2 (1 + со? ф) (кардиоида);

S б. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ 47

е) г = 10 sin Зф (трехлепестковая роза); ж) г\* = 36 cos 2ф (лемниската Бернулли);

з) ф = 7 з Г (г>1);

и) ф = 2л sin г.

371.1. Построить в полярных координатах *г* и ф графики следующих функций:

а) ф = 4*г*—г2; б) ф =———; в) г2 + ф2 = 100. 1 + . 371.2. Построить в полярных координатах *г* и ф графики функций, заданных параметрически (/ > 0 — параметр):

а) ф = 1со52/, б)ф = 1—2-'sin-y-, r = /sin2/, **J** r=1\_2-\*cos-2-. **2** 372. Приближенно решить уравнение

х3—3\* + 1 = 0 ,

построив график функции *у* = х3—Зх + 1.

Графически решить следующие уравнения: 373. х3—*4х*—1 = 0. 374. *х\*—4х* +1=0. 375. *х* = 2“\*. 376. Ig *х* = 0,1 *х.* 377. 10\* = *х3.* 378. lg *х* = *х* (0 < *х* < 2я).

Графически решить системы уравнений:

379. х + *уг* = 1, 16х\* + *у* = 4. 380. х2 + </2 = 100, *у* = 10 (х2—х—2).

§ 5. Предел функции

**1°. О г р а н и ч е н н о с т ь ф у н к ц и и . Функция** *I* **(х) называется** *ограниченной* **на данном промежутке (а,** *Ь),* **если существуют некоторые числа** *т* **и** *М* **такие, что**

*т ^[* (х) при *х* £ *(а, Ь).*

48 ОТДЕЛ I. ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

**Число то = inf {/ (х)} “ max m называется** *нижней* \*£<а, 6) *гранью* **функции** *f* **(jc). а число** *М 0* **=• sup {/ (х)} — minAf на-**

х£(а, *Ь)* **зывается** *верхней гранью* **функции / (х) на данном промежутке (а,** *Ь).* **Разность** *М„***—***т0* **называется** *колебанием функции* **на про\* межутке (а,** *Ь).* **2е. Предел функции в точке. Пусть функция / (х) определена на множестве** *X —* **{х}, имеющем точку сгу­ щения о. Запись lim** *1(х) — А* **(1)** х-\*-а

**обозначает, что для каждого числа е>0 существует число 6=6 (е) > 0 такое, что для всех х, для которых** *f* **(х) имеет смысл и которые удовлетворяют условию 0 < | х —а| < 6, справед­ ливо неравенство** I *fix)- А* |< в.

**Для существования предела .функции (1) необходимо и до­ статочно, чтобы для каждой последовательности х„ -\*■ а, х„** *ф ф а* **(х, £** *X; п —* **1, 2, . . .), было выполнено равенство**

**lim / (Хд) •=»** *А. П-ь-оо*

**Имеют место два замечательных предела:**

**1) lim —-п-\* = 1, 2) lim (1 +** *х)х,х* **-»** *е.* **х-»0** *X* **х-\*0**

**К р и т е р и й К о ш и . Предел функции** *f* **(х) в точке** *а* **существует тогда и только тогда, если для каждого е > 0 най­ дется 6 = 6 (е) > 0 такое, что** I/ <\*') - /<\*") I < е.

**как только 0<|х\* — а| < б и 0<|х" — а| < 6, где ж' н ж" — любые точки из области определения функции** *f* **(х). 3°. О д н о с т о р о н н и е п р е д е л ы . Число** *А'* **на­ зывается** *пределом слева* **функции / (х) в точке а:**

**lim f(x) = /(a — 0), х-\*а—О если**

I *А'* — *[(xf* 1 < **е при** 0 < а—х < 6 (е).

**Аналогично, число** *А '* **называется** *пределом справа* **функции** *К\*)* **а точке а:**

*А " <=>* **lim** *Кх) — Ца+0У* \*-♦0+0 если

**I** *А”* **—** *I* **(х)| < е при 0 < х—а < б (е).**

S В. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ 49

ходимо Для и существования достаточно, чтобы

предела функции *[ (х)* в точке *а* необ- *I* (а—0) => *f (а* + 0). 4е. Б е с к о н е ч н ы й п р е д е л . Условная запись

*х-\*а* lim *I* (х) =» оо обозначает, что для любого Е > 0 справедливо неравенство: *Ц* (х) | > Е, если только 0 < |х—с| < б (Е).

следовательности 5°. Ч а с т и ч х„ н ы -\*• й *а (хп* п р *Ф* е д *а)* е л имеет . Если место для равенство

некоторой по­ *П-\** lim 00 *f* (х„) = *В,* то обозначаются в (соответственно точке число Наименьший *а.* (или символ конечным и оо) наибольший *В* или называется бесконечным) *частичным функции пределом f* (х) нз этих частичных пределов х-т lim *[* (х) и х-нг lim *f* (х) функции и называются Равенство

f(x) в соответственно точке *а.* нижним и *верхним пределами* 11т / (х) ■= lim *f* (х)

*х-\*а х-\*а* необходимо венно конечного и достаточно или бесконечного) для существования функции предела / (х) в точке (соответст­ *а.* 381. Показать, что функция, определяемая усло­ виями:

/ *(х)* = *п,* если *х —* — *п* , где *т* и *п* — взаимно простые целые числа и п > 0 и / (х) = 0, если *х* иррационально,

конечна, но не ограничена в каждой точке *х* (т. е. не ограничена в любой окрестности этой точки). ничена 382. в каждой Если функция точке: а) / (х) интервала, определена б) и сегмента, локально то огра­ является ли эта функция ограниченной на данном ин­ тервале или соответственно сегменте? 4-\*ж

Привести соответствующие примеры.

50 ОТДЕЛ I. ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

383. Показать, что функция /(х) = —i — ограни\* 1 + \*4 «юна в интервале — оо < х < + оо. 384. Показать, что функция / (х)= — cos — не ог- *X X* раничена в любой окрестности точки *х —* 0, однако не является бесконечно большой при *х* -\*■ 0. 385. Исследовать на ограниченность функцию

/(х) = lnx-sin2 — *х*

в интервале 0 < *х <* е. 386. Показать, что функция / (х) = —-— в области 1 + •\* 0 *х* < + оо имеет нижнюю грань *т —* 0 и верхнюю грань *М —* 1. 387. Функция / (х) определена и монотонно возра\* стает на сегменте *[a, b* J. Чему равны ее нижняя и верх­ няя грани на этом сегменте?

Определить нижнюю и верхнюю грани функций)

388. / (\*) - *хг* на [— 2, 5).

389. /(\*)=-j , на (—оо, +оо). 1 Т“ *X*

390. / (\*) = 2 на (0, + оо). I у *X*

391. *f(x) = x-\——* на (0, -f оо). *X* 392. / (х) = sin х на (0, + оо ). 393. *f* (х) = sin х + cos х на [0, 2л I. 394. *f* (х) = 2\* на (— 1, 2). 395. / (х) = (х 1: а) на (0, 2) и б) на [0, 2 ]. 396. / (х) = х — [х] на 10, 1 ]. 397. Определить колебание функции

*f (х)* = ха

на интервалах: а) (1; 3); б) (1,9; 2,1); в) (1,99; 2,01); г) (1,999; 2,001).

« 8 ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ 51

398. Определить колебание функции

*f (х)* = arctg-i-

на интервалах: а) (— 1; 1); б) (— 0,1; 0,1); в) (— 0,01; 0,01); г) (— 0,001; 0,001). 399. Пусть *т If* ] и *М If* ] — соответственно нижняя и верхняя грани функции *f* (х) на промежутке (а, *Ь).* Доказать, что если (*х)* и *ft (х)* — функции, опреде­ ленные на *(а, Ь),* то *т* I*fi + f2]>m* 1/J + *т* I*ft]* и *м* 1/, + м i/j + *м* I/,].

Построить примеры функций (х) и /\* (х), для ко­ торых в последних соотношениях имеет место: а) случай равенства и б) случай неравенства. 400. Пусть функция *f* (х) определена в области 1а, + *сю)* и ограничена на каждом сегменте 1а, 6)с *CZ* 1а, + оо). Положим:

/л(х)= inf *f(l)* и *М(х)=* sup /(5).

Построить графики функций *у* = *т* (х) и *у* = *М* (х), если:а) / (х) = sin х и б) / (х) = cos х. 401. С помощью «е—б»-рассуждений доказать, что

limx1 =4. *Х-+1* Заполнить следующую таблицу:

6 0,1 0,01 0,001 0.0001 • • •

8402. На языке «Е—б» доказать, что **lim** 1

(1 -\* )' **+ °°.** 4

52 ОТДЕЛ !. ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

Заполнить следующую таблицу:

Б 10 100 1000 10000 • t |

8403. Сформулировать с помощью неравенств сле­ дующие утверждения:

a) lim***fix)***«ft; б) lim/(\*) = ft; в) lim /(Jt) = ft.

*х-+а* \*-\*о—0 *х-\*а*+ 0

Привести соответствующие примеры.

Сформулировать с помощью неравенств следующие утверждения и привести соответствующие примеры:

404. a) lim/(\*)«\* ft; б) lim *f(x) — b\* \*-\*ао \*-\*—оо **в)** lim **/ (дс) =» ft.**

405. a) lim *f* (дс) =\*оо; б) Нт/(дс)« —оо; х~\*а \*-\*л

в) Нт/(дс)=« +оо; г) Нт /(дс) = оо; \*-\*о \*-»а—О д) Нт *f(x)—* — оо; м<-4 е) Нт /(\*)= -f оо; ж) Нт / (дс) = оо; х-+е~-0 \*-\*л+0 а) Нт / (дс) = — оо; и) Нт /(дс)= + оо. ж-»а+0 \*-+«+0 400. а) НтДдг)=»оо; б) Нт/(дс)= —оо; f-ND \*-\*00 в) Нт/(дс)« +оо; г) Нт /(дс) = оо; \*-\*00 \*-\*—>00 В) Нт /(дс) =■ — оо; е) lim *f(x)\*=+oo;* \*-+— 00 \*-\*«\*00

Ж) Нт / (дс) в оо; 8) lim f(\*)= — оо; \*-\*+«• л-»+— и) Нт Ддс)«+оо. \*•\*+—

**s** S ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ **м** неравенств, 407. Пусть что *у* значит:

*= f* (дс). Сформулировать с помощь» а) *у -\*■ Ь* — 0 при *х -\*■ а; б) у-\*-* 6— 0 при *х -\*■ а*—0 ; *в) у-\*-* 6— 0 при *х* -\*• *а* + 0 ; г) *у* -\*■ 6 + 0 при *х* -\*> *а;* д) *у* -► 6 + 0 при *х* -»■ *а—*0 ; е) *у* -> 6 + 0 при *х а +* 0 ; ж) *у* —► 6— 0 при *х* оо; в) *у* 6— 0 при *х -\*■* — оо; *в) у -\*•* 6— 0 при л -+■ + оо; к) *у* -»• 6 + 0 при дс -\*• оо; л) *у -\*•* 6 + 0 при \* ----- оо; м) 0 -\*■ 6 + 0 при *х* ->■ + оо.

Привести соответствующие примеры. 408. Пусть

*Р (х)* = а#\*" + ... + *ап,* где числа. Доказать, *а(* (/==0, 1,..., л; л > 1,а» # что lim | Р (де) | = -j\_ оо.

0) — вещественные 409. Пусть *R (х) — Оц Ф О* и 6в *ф* 0. Доказать, что

Ь0\*'п До\*" + -f ь,лт -1- |.# . , , ,+ + ая 6т \*

°°. если л > т ; lim *R(x)= Х-\*<Ж>*

где

*ObЬо*если я = /я; о,

если а < т .

410. Пусть # (\*) ,

где *Р {х) и ц (х)* — многочлены от дс и

*Р (а)* - Q (а) =» 0. Какие возможные значения имеет выражение

lim >

54 ОТДЕЛ I. ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

Найти значения следующих выражений:

411. a) limх-о JC3— 1 2х2 — *X* — 1 ; «V б) lim\*-► 1 \* \* - 1 2х2 — х — 1 ’ **в)** х-юо **Нт—** 2х2 — *X* — **1—** 1 **.** 412. lim -<■ + \*><■ + <■ + 3» -1 < 413. *limJL±#-<'* ДС—►О х-.о *х1* + х5 *X + \*\*)* . 414. *Л1Л* lim lim *Х-.0* -------------- ( Ч - т х ) п — ----------— (1 + ЛХ)т (ш . и л—натуральные числа).

415. lim (х — 1) (х — 2) *(х* — *3) (х* — 4) (х — 5)

416. Х-.ОС Нт (2Х+1)50 . 417. Нт Х-.ОС (H-»)C\*+l)v "+1

. <\*+»).. К«У+ ч

418. Нт

420. Нт

419. Нт x-.i х3 — Зх 4- 2 х4 — 4х + 3

422. Пт

— 5x4-6 *з* х2 — 8х 4- 15 х-»1 х5 *х\* —* — Зх+2 4х 4" 3

421. Нт х-\*2 х3 х4 — — 2х3 8х2 — 4- 4х 16

4” 8

\*\_\_1 х3 — 2х — 1

х5 — 2х — 1 423. lim

х\_2 (х2 — х — 2)20

(X3— 12x4-16)1,

424. Пт-

х-И

424.1. Пт

X— 1 xioo \_ 2х 4- 1

х- i х5“ — 2х 4- 1

425. Н т*—п ‘* ^ - *(т* и л—натуральные числа).

426. *лпо* П I- т - *(\*"* 1-------- — я")— -------*-*--------- (х —а)2

*пап~1 (х*—*а)* — *.* (л —натуральное

число). 427. Пт--------^ Д-\*1

^ 1— (л—натуральное число).

$ 8 ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ 55

428. limf— ------------ *-*— ^ ( / л и л —иатураль- 1 —х»\* 1-х» *)* ные числа).

429. Пт — ГГдг-Ь —W ( jc+ *— )+* . • . П-.0О л L4 я / V. я /

430. lim — —Y + fJC+ " ~ Y + • • • Л-.оо *п п J* V я /

У к а з а н и е . См. пример 2.

431. Ит Р+ 32+ • • •+ (2л- 1)»

*п*~\*эо 2“ \*4” "I" . . . -f\* (2я)\*

432. I|mf.|,+ g + • + - — У). л-»эо \ л® 4 / Указание. См. пример 3. 433. Ит 'Ч-44-Р + ■..+ »— 2)’ [1 + 4 + 7 + -----ИЗп —2Ц\*

434. Определить площадь криволинейного треуголь\* ника *ОАМ* (рис. 3), ограниченного параболой *у* =»

= ft *(xla)2,* осью *Ох* и прямой *х = а,* рассматривая ее как предел суммы площадей вписанных прямо\* угольников с основаниями *а/п,* где *п -\*■* оо.

отдел I. ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

Найти пределы:

435. \*-\*•+00 lim **л /\*+ У \*+ у \*** 436. \*-► lim +00

**ут+т**

***V l+ V l+ V L* yix+T**

437. **цш i ! i k r L .** \*-►< V\* — 2

438. lim •У 1-- \*-3 .

2 + ^ 7

439. „ж V ^ V a + V,—

V\*\*— < **(a>0).**

44в. х-»з |1т..У ^3- x\* — 2У,+..' 9 . **441.** X-\*—2 **Hm** x\*+8

442. lim x- ,e V ^-4 443. lim \*-\*8 -V-g± ?/-“ V"J-2

jf ~ 5

444. lim x-\*0 —-——-------- \_1\_ *x* x \_\_ I (n—целое число). 445. x-\*-0

lim У 1 — *2x — x\** — (1 4-x>

446. lim

*X-+Q* 3/8 + 3\* — x\* -2 *X* + X\*

447. lim

V27 + *'\* —V27-X*

3 ,

\*-° x-m V\*3"

448. i-io lim.VI+T Vi + \* - — Vi ^ —\* :^

$ S. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ 57

450. lim x->0

**-V -T** 451. lim-

\*-° 5/ l + 5x-(H-Jt)

452. lim *У Х* ^ t + (m и я—целые числа).

числа). \*----- 453. *x-\*Q* lim Z 1 + “\* / *X* 1 ± .fr . (*m a n* — целые 454. Пусть *P (x)* = *axx* + *atx\** + . . . -t- *алхГ* и m— целое число.

Доказать, что x-\*0 lim- Yl + PW -l atm Найти пределы:

455. lim — (m и n—целые числа). х-И 7\*-l

455.1. lim Г

i —v \* 456. lim ( | - У ^ ( < - \* А ) - 0 -УГ)

x-l (l-\*)""1 457. lim [V(JC+<\*)(-\* + ^) —•\*]•

458. Х-Ф-fr-OC lim **+V\*+v\* — v\*)\*** 459. lim дс (У\*1 -f *2x —* 2 -\/jc*\*+ x* -f дс).

JC-Ф-^-ОО

*m-* **^.(V'T+Vt +a/? -**

**—V'T'Vt +Vt )•**

58 ОТДЕЛ I. ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

**461. Нт(у/>+\*» + 1 — \*\* + Г).**

**462.** *fy \** **+1^\_у^С-2л:').**

**463.** *Х-+оо* **Нт дс,/3 Цдс + 1)2/з\_^\_ j\2/3j** *' \** \*

464. *Ш ^ М 7 ^ - 2 л/ ^ + л/7).*

\*-»+!» НTM ***\\_Vkx~*** ах). . . (\*+а„) ***—х].*** J

ральное 466. число).Х-.+0О lira ( x - V x ^ - i )п + (х + л /хг\_ )я

1 *Xя (п*—нату-

467. ральное *х* число).

Нт -.0 *No + \*' +* \*)" - (Уч- \*8 - \*)" (я—нату-

468. *а* причем уравнения стремится 469. Изучить *ахг +* поведение *Ьх* + *ЬФ* к 0. нулю, а Найти постоянные *с* = коэффициенты корней *хх* и *хг* квадратного 0, у которого *Ь* и *с* коэффициент постоянны, *а* и *Ъ* из условия

0.

470. Найти постоянные *at* и ft; *(i —* 1, 2) из условий:

*Х-+—00* Нт (У\*2—лс + 1—*ахх*—*Ьх) = 0* й

*Х-\*+Ой* **Пт** *«Jx\*~\*x* **+1** *— а^х— Ьг)* **= 0.** Найти пределы:

471. Х-\*0 lim ^ \* L . 472. lim ^ L. *х-\*ов Г*

473. П ***х-\*я*** т -sinw— ***sianx***

*(т* и *п*—целые числа).

4 5. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ 6»

474. lim 1~ с.” —. 474.1.

\*-\*0 *x* 474.2. limjcctgSx.

\*-»o **475. lim-tg\*~-s--\*-**

\*-\*•0 sin3 *x* 476. lim sin *b x* — sin 3\*

s in x

477. lim-cosx~ ■. 478. lim-1+sin\*~cos\* .

\*-♦ 0 x\* \*-»o 1 + sin *p x* — c o s *p x*

479. lim tg 2jctg^—— jc) . 480. lim(l—j c ) t g ~ . \*-mi/4 \ 4 ***J*** x-»l 2 481. Доказать равенства:

a) lim sin jc —sin a; 6) lim cos jc = cos a; *x-\*a л-т*

*в)* lim tgx = tga *x-t-a*

л = 0, ±1, ±2,. . .

Найти пределы:

482. lim-sin\* ~ sin- . 483. lim ■с- \* ~ С05а . *x-t-a x* — a x-\*e *x* — *a*

484. lim-tg*\** —tg— . 485. l i m ctg fl . x-м x — e x-»o *x* — *a* 488. lim-se<:--~ —a-. 487. lim .5g?\*c

488 lim sin (g + 2\*) — 2 Sin (a + x) 4- sin n

x->o *x1*

489 lim cos *( a* + 2\*1 — 2 c o s *(a* + *\* )* + c o s a

x-\*o x\*

490. lim -tg 2 \*6 + \*) + {e e t \*-►0

491 . lim ct6 (fl + 2x) — 2 ctg (a + x) + ctg a ^

*X-+0* x l

492 lim sin (a + \* )sin (e + 2x) — sin3 *a*

*x-+ o x*

493. lim 2 sin2 x + sin x — 1

x-wi/6 2 sin\*x — 3 sin x + 1

**«о** ОТДЕЛ I. ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

4S4. \*-►0

Пт 1 — cos x cos 2л cos Зл

1 — cos л 495. х-\*я/з Н т ---- **Ч'~т)** 1—2 ^----- cos LrL. л 495. Х-П/З Пт **соч *f* х** . **+** я **т** \ **)** 497. X-.0 П т л\* . . 498. Пт — Lz£\*ii£— . Х-.Я/4 2—ctg Л—ctg3 Л 499. lim *jd l* **± il\* ~ У f t** *x* **sin .** X-.0 Л\*

500. lim— ---------\*\*■--------------.

Vi + «in\*-VSTT

— sol. -— x-.fi lim ^ Z sin4 --3/c'°01. Л

502. X-M) *lm ^* 1 — *'* cos *cosxl* Л 503. lim-

*x\*°* 1 — cos (V\* )

504. lim J.~ С08л У с05 2л V cosЗл

*\*-\*Q x\**

*m '* **Л”1\* (sin V\*+t —sin** *- y / x ) .*

506. a) lim *(JL±\*Ail~^xm~\*\*.*

Vxi/(i-«e)

**•В К Г ^ “ ..А « Г \***Ш. л-.» lint ч 2л — 1 / • 508. *х-\*х* Пт ч 2л2 + л -f- 1 / VET. 509. *П-+ас* lim *(*sin*\*—2пп* \ ЗЛ 1 / V 510. Х-.Я/4+ lim oL rtg('-J-4-x>)l‘\*2Jt. 48 *J i*

511. *X-*lim

*m* — v *(-* л2 + A.V+i 1 *X— l )* . 5 ,2 . iim im -.00 ***(-£*** Ч л2 ***£*** — ***L* 2** *)* ***Y***

I 5. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ **61 513. Й".(тай-Г- 514-**

515.

*ЬNoУ-* 516.

\*-►+00 lim /J!l£±A.V \ <\*\*\* + *bt J* (aj>0, a\*>0). 517.

«-\*0 lim(l +\*\*)\*•\*'\*. 518. \*-\*l iim(l+siniu)\*‘«\*\* 519.

«-►o\ 1 + smx /

519.1

l/\*in\*x \*-\*o V 1 I + + sin\* Sin X

/

520.

U «-►Asina/ ra fJlE i.'p :. 821. \*-»oV cos 2sr / 522.

lim (tg jc)‘\* u . 523. lim (sin дс)\*\* \*. \*-»Я/4 х-\*Л/2 524.

**й М \* - \* ) Г** 525.

*X-+OG* lim ( 4 sin — X *л.* cos 1 -)• 526.

limV^сcos V F .

527.

529.

iimJM i± iL . \*-►0 X

531.

\*-\*a lim-1-- x —lnfl — *a* 532.

533.

534.

535.

536.

528. lim cos" *—£=-.* V» 530. x-o+oo

lim x[ln(x-f 1)—lnjfJ. **(a>0).**

\*-►4\*00 lim x-+4-oo lim [sin In (x + 1)—sin ■In In (\*">+\* (X \*-X + + 1)

1) \* In\*]. lim \*-► 00 ftg \ - 1 100+ + Xs \

lOOx\* *) ’* \*-►4^0 lim • In(2 In(3 + + «“ )

\*\*\*) ’ \*-► lim +00 In(i In(i+V\* + *V\** + + V\*) *V\*)*

62

ОТДЕЛ Г. ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

537. h-\*0 |im> g (\* + \*) + log(S-A)-2 А\* log\* *(,* m **538. liizr------VL-----** ,ntgf'7‘ + ajtl *L .* **539. lim—!Lc\_°.\_a\* ,** \*-\*■0 sin 6\* \*-^) In cos 6\*

540. \*-°\ limfIn— \*+Vl-x\* + ^ ‘~ n8\*--Y /

540.1. lim M y + V i^ S ..

\*-\*° ln(\* + V l— X\*)

541. (a>0). 542. lim-g.-\*\* (a>Q).

543. lim —— (a>0). 544. lim(x-l-e\*)l/\*.

*\* + \** X — <1 *X-\*-Q* 545. \*-\*o4 lim Г-L±- 1 + x-3\* ?\* *)* V'\*. 545.1. \*-\*•0 lim ( \ — 14- sin sin \* *x Q0S* cos *ax* {$\* Y\*8\* / \*. 545.2. . 545.3. lim-

\*-\*> sin(n\*P> \* - i in (cos ( я -2\*)]

546. *n-\*oo* lim tg" (-J- 4 4 + -LV *a y* 547. x-.0 iim — sin f a\* ^ — « p\* 548. lim \* \* — o« \* 0 --вР (a>0). , . ... 549. \*-\*i . lima\* — a\*

\* — A

sin ***(lx***

**(a> 0).**

550. ft-0 lim aX^ + QX~ Л\*

— — (a>0). *(x-+-a)XH,(x+b)x\*b*

552. limnfv^jT—l) (x>0).

553. lim П-КЖ *п\*(^~ПУТ)* (\*>0). 554. lim n-\*oo Г *\* .? -1± *a* - ^ Т */* (a>0, 6>0). **555** \*-»» **.ь** lim **.П** ( \ J **'г** g + **+** 2 V **УГ'\*** T Y / (a> 0 , &>0).

5 8. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ 63

**«\*• (о>0,** *ь>а,* **с>0).**

**"• а ( —.+ Т У Т (“>0' 6>0' «>\***

658 \*-.0 lira ( \ ^ I в\* ± -J- J S 6\* L V /

" **(а>0, Ь>0).**

559. *х--0*

lim **(а>0, 6>0).**

560. lim

***а\**** *X2* — ***bx*** *XX2 xZo* (а\* — fr\*)>

*a\* — x\** **(a > 0).** 561. a) lim in.<» **ln(l** + **+** 3\*).., **2\*) ’** Hm ЦОН-У) **ln(l + 2\*) \*** 562. '-\*+« lim In(1+2')Inf V. 14- ~ *x )* \ . 563. lim(l—jc) \*-► 1 logj, 2. 564. Доказать, что

\*-.+00 lim *a\**

565. Доказать, что

\*-► lim +00

**logfl\*** = 0 (a>l, n>0).

= 0 (a>l, e> 0).

Найти пределы:

566. a) lim 1,1 (\*\*+\*\*) . **ж-.о In (JC4 4- e«) ’**

**In (1 +** *xe\*)*

6) \*-.+« Hm 11II! \_. *Л* In (x«+e\*\*) . • 567. lim \_\_\_ \_ .

**\*"\*° In** *(x +* **V 1 + \*\* )** 568. lim l(jc-t-2) in (\*4- 2)—2 ( л + 1) In (\*4- l)4 -x In *x\.*

*X* > | 00 569. \*-► lim +0**rIn (x In a) (a>l).**

64 ОТДЕЛ I. ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

571. \*-\*-0 lim Vl у + \*sinx—1 — — 1 -------- 572. \*-\*■ lim 0 cos (*хех)* — cos (хе-дг) \* 3 573. \*-\*0 lim(2e\*/u+1) ■— l)i\*J+i>/\*# 574. lim \*-\*•! (2— \*)«« <«w/2). **575.** x-wt/2 **lim** 11111 V(1 ~ ---- — sin® 1 \_sina+px ----- \*) ~ (1 — - sing — *x)*

576. a) x-»0 lim-^-; *X* 6 ) *X-+0* lim— -~-1- *xi*

(a>0, P>0).

**в)** \*-0 **lim - h-\*-** *x*

**576.1. lim**

**(см. пример 340).**

sh2 *x x-+o* In (ch *3x)* **(см. пример 340).** 577. **lim** OO s h V ^ - ch\*

s h V i E L .

**577.1. a)** *x-\*-* **lim**

*a* sh \* — sh *a*

*X* — *a*

**; 6)** *x—a* **lim ——~-c—** *x — a*

**.**

**577.2.** *x—o* **lim**In ch \*

In cos *X* **578.** \*-► **lim** -{-00 **(дс—Inch a:).** 579. limx-\*o

*e* „sin2x — *в*

.sin *x* th \*

/ ch-i V ‘ **580.** *П-+00* **lim**V COS **581. lim arcsin**

*n )* 1 —\* 1 -f- *г*

**582. lim arccos (Vx2 -f \* — x).**

*X-++GO*

**583. limarctg----------** \*-2 (\* - 2)2

**584. lim arctg** V h- **585. Um** *ь-\*о* **.arctg ^ +** *h*

**h> -arct^ .**

5 e. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ 65

**In** 586. lim

1 + \* 1 —\* **\*—о arctg** (1 **+** *х) —* **arctg** (1 **—** *x)*

587. l n-ooL i m f n a r c t g -------- л (jb« + 1 *l-*--------- 1> + x tgnf е ^ — 4 *A*——Y|. ^ 2 я / ]

588. \*-00 lim *x (—*---- V 4 arctg — -— ^ . *& x + \ )*

589. Jf-^+eo

lim h+0° *x* (—— V 2 arcsin —— Y V \*2 + 1 / 590. ll—oo lim Г1 L + ( \_ *n l)n-* l)n J *'\* icosec 6\* Vl+n\*) 591. lim— 592. lim\* In\*. x —0 x—+ 0

593. a) lim (У\*а + \* —x); 6) lim (У\*2+\*’•-\*).

*Х-+-Г-00 x~\*-+-ao*

594. a) lim (yi +х + дс2 \*— y i — x + x 2);

6 ) lim (yi+x+x\* ^yi-^x+x2).

X— + o o

594.1 Найти A= lim /(jc)—\* lim *f(x),* если

*X-¥+0O* X -> -\*0 0

/ (x) == In *x* **+** *л/хг* **+** *a2* **x+ У\*г + й1**

595. a) lim arctg—-— ; 6) lim arctg—-—

X— 1—0 1 — *X* \* - 1 + 0 1 — ж

*m ■* a)

1 6) lim 1

597. a) lim J lii+ jfL . 6) lim - ln (1 + e<) .

X -\*— oo *X x-+-±-oo %*

598. Доказать, что

а) ——---->-2 l + x + 0 при *x->*— oo; б) ——----> 2 — 0 при x->- + oo.

-2383

66 ОТДЕЛ I. ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

599. Доказать, что а) *2х* -> 1 —0 при х-->— 0 ; б) *2х* -> 1 + 0 при х->- + 0 . 600. Найти /(1), /(1—0), /(1+0), если / (х) =» «= *х* + (ха). 601. Найти / (*п*), / (я—0), / (я + 0) (я = 0, ± 1, . . .), если / (л:) =» sgn (sin *лх).*

Найти:

602. Нш дел/cos — . 603. НтхГ—"I. ж-о V *х*\_\_\_ JWU. L *х* J 604. lim sin (л у я2 +1). *П-+0О* 605. lim sin\* (л У я\* + *п* ). Л-\*» 606. lim sin sin ... sin *x.* Л-»00 ■■ -'V ■ *п* раз 607. Если lim <р (л:) — *А* и Пт ф (л:) = *В,* то следует *X-+Q х -+ А* ли отсюда, что

lim^l? (ф (д:)) = В? *Х-+Л* Рассмотреть пример: *<р (х) = l/q* при *х = plq,* где *р* и *q* — взаимно простые целые числа и ф (х) = О при *х* — иррациональном; ф *(х) —* 1 при *х Ф* 0 и ф (х) = 0 при *х —* 0 ; причем *х -+■* 0 . 608. Доказать теоремы Коши: если функция *f* (х) определена в интервале (а, +<х>) и ограничена в каждом конечном интервале *(а, Ь*), то

а) lim = lim (/ (х + 1)—/ (x)J;

б) iim [/(x)Jl'\* = Пт *(f(x)>C>0),*

предполагая, что пределы в правых частях равенств существуют. 609. Доказать, что если: а) функция / (х) определена в области *х* > а; б) ограничена в каждой конечной об­ ласти *а* < *х* < *Ь;* в) lim I/ (х + 1) — / (х) J = со, то

f S. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ 67 в ласти области 610. *а<х<Ь; х* Доказать, *> а;* что если: 1) функция *f* (\*) определена 2) ограничена 3) для в некоторого каждой натурального конечной об­ *п* существует конечный или бесконечный предел

lim У(х+1)~ /(х) Х - + о о *Х п = 1,*

ТО

Пт *Х—+о\**

/(\*) \_ *I*

Я-|- 1 611. Доказать, чтоа) ***п-+о***о lim *(* \ 1 4 - —Y ***п J*** = е\*; б) п-фоо lim(l+ \ \*+-£- 21 + я! /

612. Доказать, что

lim nsin(2 nenl) = 2n.

е\*.

У к а з а н и е . Использовать формулу (\*) примера 72. Построить график функций:

613. а) *у= \—* л100; б) t/=lim (1—\*2п)(— 1<х<1)

614.

615.

616.

617.

1 **+ \*10#**

*X я* — *х~п* п —.во *X я* + *Х~я*(\*>0); б) *у=* lim *X я*

п-\*оо 1 + *X я* **(\*> 0).** *(хфО).*

П-ФОО Нш д V / *у= П-+О0* Нтул1 +\*я (\*>0). 618. *у=* lim | / Г + 1 \*л + ( ~ ) Я *(\*>0).*

619. t/=lim я-\*-00 — ***y\J<pn*** ----- ***хгп***

*(х* ;> 0).

620. a) i/ = sin1009jc; б) у= *п-юо* lim sin2" *х.* 5\*

а) *у=*

*у =* lim

**cs** ОТДЕЛ I. ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

621. lim - (2Я + хЯ) - <х>0).

rt—\*-оо *П* 622. *у —* lim (дс— l)arctgx\

623. г/= lim

624. *у* = lim *х + е,х*

625. *у=* lim

1 + *etx*

1 In — <-\*jr / — Xxtg\*"- 625.1. *y=* lim

**(O O ).** *Xnx*4

+V\*

(\* > 0). tg\*"-“ + 1

625.2. = lim xsgn | sin\*(n!nx) |.

625.3. Построить кривую

*tl-\*oo* lim *V\x\n+\y\a* = 1. называется 626. *Асимптотой* прямая *у* (наклонной) *— kx + Ь,* для для которой

кривой *у — f (х)* lim [/(\*)—(Лх+ед-о.

статочные Используя условия это уравнение, существования вывести асимптоты. необходимые и до­ 627. Найти асимптоты и построить следующие кри­ вые:а) *у = -* \*s\_|\_x\_ *т т ~*—г; 2 ’

б*) у =* v\*a+ \* ; *в) y = V x \* — x3 '* г) *у = хе\* ег* — 1 д) г/ = 1п(1 +е\*); е) *у* =\*х+ arccos — *X* . Найти следующие [ гЛ+1

пределы: (я 1 + + 1) »! <«+ 2)! (2л)I J ’ 629. д-\*оо lim [(1 +\*)(1 -Ь дс\*) (1 + *х\*)*. . . (1 -f х2")], если |х !< 1.

5 5. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ 69

630. Нш «-0oV (cos -i- 2 cos ~ 4 ... cos — 2я у 'j. 631. Пусть *х-\*0* Нш ip (X) = 1, где ib (\*) > О и пусть *amnZt* при *т* 0 = *(т* 1, *-* 2, 1 , . . 2 , . и . *п* . > .) *N* при (е). л -><», т. е. *\атп* | < 8 Доказать, что

«•Г» Нш 1<р(аи) + ф(а\*«)+ . . . +<p(ann)] = **«=** л-\*оо **Иш [-ф («ш) -Ь “Ф («ал) Ч- . . . +ф(а„,,)1, 0)** предполагая, что предел в правой части равенства (1} существует.

Пользуясь предыдущей теоремой, найти:

632. ит. К \*=1 К 1+ 633. *п* Иш Л-\*оо *k\*n\* yfsin-^-V \ Л\* / 634. Нш £ {а\*/я’— 1) (

635. *п-юок=1* Иш П ( V 1 + V") *п У*

636. п-\*® Иш П cos—\*/- « Vn

637, Последовательность *хп* задана равенствами»

*х ^ л / а ,* **\*а = V a + V a >** *\*з ~* **л / а + Vа + V® » • • «** (а>0). Найти й^9в

Нщд:п.

70 ОТДЕЛ !. ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ 637.1. Последовательность *хп* задается следующим образом:

\*i = 0 , *хг* = 1,

*хп = — (xn-i* + \*„-г) *(п* = 2, 3, .

Найти 11т *хп*

*п~+ао* мощью 637.2. последовательности Последовательность *хп* соотношениями:

*у„* определяется с по­ Jo= ^oi *Уп~ хп* адс„\_1 (я=1, 2, . . .)» где loj < 637.3. Последовательность 1. Найти *П-+О0* lim х„, если х„ Л->+00 Нш определяется *уп* = *Ь.* следую­ щим образом: *Хц* — 1\* *Хп* — (а — 1> 2 , • t | )• 1 + \*a-l Найти lim *xa.*

*tl-+ o o* У к а з а н и е уравнения *х* = — 1 ■ Рассмотреть .

разности между *хп* И корнями 638. Последовательность функций *Уп = Уп(х)* (0<х<1) определяется следующим образом:

**j—^ <п=2’ 3” •** Найти (0 < 639. *х* < Пш *П-+0О* Последовательность *уп.* 1) определяется функций *у„* следующим образом:

й = — • *Уп- Уп*- . (я = 2 , 3, . . .

(\*3

Найти Пш *уп.* 639.1. Пусть х > 0 и *уп* = «/n\_i (2— J (я — 1, довательность Доказать, сходится что если и

//г > 0 (i = 0, 1), то после­ *п~>оо* lim *уп = — X*

*.*

\* 8. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ 71

У к а з а н и е . Изучить разность

— *X* 1— *Уп* • 639.2. Для меняется следующий нахождения процесс: *у0* > *у* = *ojx,* где 0 — произвольно,

*х* > 0, при­ *уп* =\* *——* ■ *(уп-i* V *Л*-------- *У*/ (п / = 1, 2,. . .). Доказать, что

lim *уп —* У \* .

У к а з а н и е . Использовать формулу

*Уп — УХ /*

**(„а1).** *Уп+^/х* \

*Vn~*1 + V\* / 640. Для приближенного решения *уравнения Кеплера*

*х—* esinx=/n (0 <е< 1) (1) полагают *х0 = т, xl = m+eslnx0, .* . *., xn — m+&smxn-i,.* . . *(метод последовательных* Доказать, что ляется 641. единственным Если существует шй корнем [/] *приближений).* 6 = есть уравнения колебание No-bOD lim *хп* (1). и функции число | яв- *f (х)* на сегменте |х— £1 < *h* (Л > 0), то число

(о0[Л = Л-ф-0 Нт©А1/1 называется Определить *колебанием* если / (0) = 0 колебание и при *х Ф функции* функции 0 *f (х) f* (лг) *в* в *точке* точке |. *х —* 0, имеем:

а) /(\*) — sin — *X* ; б) / (х) = -5-cos\*— *X\* X* ; *в) f(x)—x(2+sin—* г) /(\*) = — arctg — ; \ *X* / *Я X*

Я )/М - JSEiL. еН<\*) =

ж)

642. Пусть / *(х)* = sin

1 1 + «V\* \*

72 ОТДЕЛ I. ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ Доказать, что, каково бы ни было число а, удовлет­ воряющее условию — 1 < а < 1 , можно выбрать по­ следовательность *хп —\*■* 0 *(п* = 1, 2 , . . .) такую, что lim / *{хп)* = а. 1~»оо643. Определить *I —* lirn *f (х)* и *L = \im f (х),*

jc—\*-0 *х-+0* если:а) /(jc)=sin\* — -j—— arctg ; *X п х*

б) *f{x) — (*2 —*х?)* cos -i-; в) /(\*) = ^ 1 -f cos\* J ' c U/Jr>

644. Определить

\* = lim/(x) и L = lim *f (x),*

*X-+0O* X-frOO если:a) *f(x) =* sinr, б) / *(x)* = дс\* cos\* дс;

в) /(дс) = 2“" '’; г) Д х )= ---^ -5— <дг>0).

§ 6 . О-символика

1°. Запись

<Р *(х)* = *О* (ф (ж)) при *х* £ *X* обозначает, что существует постоянная *А* такая, что

|ф<х)|<Д|ф(ж)1 для (1) Аналогично пишут

Ф (\*) = О (Ф (\*)) при дс -►а, (2) если неравенство (1) выполнено в некоторой окрестности *Va* точки *а* (дс *Ф о).* В частности, если ф (дс) *Ф* О при *х £ Ua (хф °)>* то соотношение (2) заведомо имеет место, если существует ко- <р (х) иечный Ит -------- *Ф* 0. В этом случае будем писать <р (дс) = *Х -\*0 Ур* (Х) - О\* (ф (X)).

Если

(р>0), *х-\*0 хР*

то ф (дс) называется *бесконечно малой порядка р* относительно

73 f 6. 0-СИМВОЛИКА

бесконечно малой х. Аналогично, если

lim ^ *хр = кфО* ( р > 0), то бесконечно ф 2°. (х) Запись

называется большой *бесконечно* х *большой порядка р* относительно ф (х) = *О* (ф *(х))* при *х -\*■ а* обозначает, что<р(х)=а(х)ф(х) (х£(/а, *х Фа),* (3) то где равенство о (х) -\*• 0 (3) при эквивалентно *х -\*■ а.* Если утверждению

ф (х) *Ф* 0 при х £ 1/„, *хфа, х-\*а* lim \_£ifL ф (х) в 0. (Ф (х) 3°. ~ Функции ф (х)) при ф х -\*• (х) *а,* н если

ф (х) называются *эквивалентными* Ф (х) — Ф (х) =• *о* (ф (х)) при *х-\*а.* (4) Если ф (х) *Ф* 0 при х £ *U а, хф а,* то из (4) имеем

*х\*а* lim ф(х) Ф(\*) 1. При х-»-0 справедливы соотношения эквивалентности! sin х ~ х; tg х ~ х; а\* — I ~ х in *а (а* > 0);

1п(1+х)~х; У 1 + х — I~

Вообще

Ф (х) + о (ф (х)) ~ ф (х). лых при нить При х (или эквивалентными. -\*• нахождении *а* бесконечно данные функции предела больших) можно отношения функций заме­ двух *^* бесконечно *г* ма­ *н АОВ* 645. = *х* Считая (рис. центральный угол 4) бесконечно малой 1 -го порядка, определить порядки малости *А В;* б) стрелки следующих *CD;* величин: в) площади а) хорда сек­ тора е) *АВС;* площади *АОВ;* д) площади г) сегмента площади трапеции *АВС.*

треугольника *АВВ^Ац* \

■ *и* ^ 7 *1в*

щая ция 646. *f* при *(х), х* и Пусть Off *а о* (/ *(х))* — произвольная функция, имею­ более низкий порядок роста, чем функ­ (\*)) — любая функция, имеющая при

74 ОТДЕЛ I ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ *х -\*■ а* тот же порядок роста, что и функция / (л), где / (\*) Показать, > 0 . что

**а) о (о** *(f (х)))* **= о** *(J* **(л-)); б)** *О (о Q* **(л)))** *= o(f* **(а));** в) О (О (/ (а))) = о (/ (а)); ***г) О (О и*** (а))) = О (/ (а)), ***R) О (f*** (а)) + о (/ (а)) = О (/ (л:)). 647. Пусть а -\*• 0 и *п >* 0. Показать, что а) *СО* (а") = *О* (а") *(С* ***Ф*** 0 — постоянная); б) О (а") + О (а") = *О* (а") *(п<т);* в) *О* ***(хп)*** *О* ***(хт)*** = *О* ***(хг,+т).***

648. Пусть а —\* Ч- оо и 0. Показать, что а) *СО* (а") = *О (хп);* б) О (а") + О (лт) = О (а") (л > т); в) О (ап) ***О (хт)*** = О (А'1+т).

649. Ф *Ч>* 1) *(х)* (а) 650. рефлексивности: ~ *~* Показать, ф (а), Ф Пусть (\*) и то а ф —»- ф (а) (а) что 0. ~ <р ~ Доказать (а) X символ ф (а), ~ (а); ф то (а); *г\** 3) ф следующие обладает транзитивности: (а) 2 ) ~ симметрии; X (а). свойствами: равенства: если если а) 2а—а2 = О (а); б) a sin V\* = О (а3/2);

в) a sin-1 = 0(| а!); г) 1па = 0(-1-) (е>0);

Д> V я+ У а+ д/7

е) arctg- 1 = 0 (1);

Ж) (1 + А)" = 1 + ***пх*** + 0 ***{х)***

ства:**651.** Пусть **а —\*■ -{- оо.** Доказать следующие равен- а)б)

2 а3—За2 + 1 = 0 (а3);

$ в. О-СИМВОЛИКА 75

**в) х+\*\*5тх=0(\*\*); г) =**

д) *\пх = о(Хе)* (е>0); е) *х^е-\* = о* ;

I— - . ч ——1.„. I д / *х +* V *х* + У\* *~-фс\* з) дс® 4 \*\* In100 *х \*\*\* х\*.*

652. Доказать, что при достаточно большом *х* > О имеют место неравенства:

а) *х2* -f 10\*-f 100< 0 ,001х3;

б) ln100° j c » в) *х1°е\* < е?х-*

652.1. Доказать асимптотическую формулу

*■yjx\* + p x + q* ==Jf+ - Y + 0 (‘7 ')

при *х -\*■* 4 - се. 653. Пусть *х -\*■* 0. Выделить главный член вида *Схп (С* — постоянная) и определить порядки малости относительно переменной *х* следующих функций:

а) *2х—*Зх’ + х8; б) У 1 + х —У 1 —*х\*

в) Vl—*2х*— Зле; г) tgx—$inx.

654. Пусть *х* -> 0. Показать, что бесконечно малые

a) *f(x*)=-±—; б) *f(x) = e~4\** In *X*

не сравнимы с бесконечно малой *х" (п* > 0), каково бы ни было *п,* т. е. ни при каком *п* не может иметь место *f (х\* равенство lim - *= k,* где *k* — конечная величина, JM-0 *хп* отличная от нуля. 655. Пусть *х* -\* 1. Выделить главный член вида *С (х*—1)л и определить порядки малости относительно бесконечно малой *х—* 1 следующих функций:

а) х3—Зх + 2 ; б) *V* 1 — У\*"; в) In г, г) в\*—*е\* д) *Xх —* 1.

76 ОТДЕЛ I. ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ *Сх\** большой 656. и определить Пусть *х х-\*~ +* порядки следующих оо. Выделить главный член вида роста относительно бесконечно функций:

а) х\* + 100\* + 10000; б) ------—------; *х3 — Зх* + I

в) *Хг—X + <у[х\* г) дА + лА + л/^ • 657. Пусть *х -\*■ +* оо. Выделить главный член вида *С(~~у* и определить порядки малости относительно

бесконечно малой — *X*

следующих функций: a) ^ v^+l *—л/х* ;

в) V^+ 2"—2 V^+T + : г) ~ s i n .

658. Пусть *х* -> 1. Выделить главный член вида — Ц -)" и определить порядки роста относительно

бесконечно большой .. следующих функций:

а)г)

\*•\*-1

б)

В> уг=\*г sin 1

*пх*

Д)

lnx

659. Пусть *х* -► + оо и /„ (х) = Доказать, что 1) каждая из функций стрее, ция *ех* чем растет предшествующая быстрее, чем функция каждая Xя из *f fn* (л *„* функций (х) = *(х);* 1, растет 2 ) 2, функ­ . *fn* . бы­ (х)' .). (л = 1, 2 , . . .)•

660. Пусть *х -\*•* + оо и

*fn {х) = \Гх (п* = 1, 2 , . . .). медленнее, 2 ) из Доказать, функция функций чем *fn f* что предшествующая 1) каждая (х) = In х растет (х) (л = 1 , 2 , из . функций функция *fn (х) fn.i* растет (х)} медленнее, чем каждая1 . .).

77

661. Доказать, что какова бы ни была последова­ тельность функций

/ 1 (\*), /i (\*). • • • , *fn* (\*), • • . (\*0 ***< х*** < + оо), можно растет быстрее, построить чем функцию каждая / (\*), из функций которая при /„ (х) *(п* + = оо 1 , 2 , . . .).

$ 7. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

§ 7. Непрерывность функции

называется 1°. Н е *непрерывной* п р е р ы в н о при с т ь Xя ф х, у н (или к ц и в и . /почке Функция х0), если

/ (х) 141, Нш / (х) « / (х0). (1) для т. е > е. всех 0 если существует значений функция 6 f (х), = *f* (х) о имеющих (в, определена х0) > смысл, 0 такое, при выполнено х что = хф при и для | неравенство х—х„ каждого | < 6 If W - 4 <\*•>!< «• ласти рывна (т. ция *X* предельной или нами \*\* е. Функция не Если (в) {х} не нлн в определения определена обе имеет каждой (интервале, при (а) части точкой / не места), некотором (х) существует точке формулы в называется этого точке *X* сегменте то = множества множества, хф значении х {х} (1) = называется число *непрерывной* н имеют функции хф, т. или *X.* п.), / х (хф), равенство смысл, — (б) если *точкой* хф, / не иными (х) *на* существует эта принадлежащем но *данном* или (1) *разрыва* равенство функция словами, не являющемся *множестве* выполнено *х-+х0* функиии lim непре­ между функ­ *I* об­ (х), */* существуют *1хК*Различают: конечные 1) *точки* односторонние хф *разрыва первого* пределы: *рода,* для которых /(\*о — 0) = х- м Нш <,—0 /(х) и/(хф+0)= Нш х„-|-0 /(х) п 2) *точки разрыва второго рода* — все остальные. Разность

/ (\*„ + 0) - *t* (х0—0) называется Если выполнено *асанком функции* равенство

в точке хф. / (\*о — 0) = *f* (х0 + 0), <го то мере точка хф Если один называется разрыва из выполнено пределов хф точкой называется равенство

*f* (хф *бесконечного* — 0) или *устранимой. f* (хф *разрыва.* + 0) равен Если по символу меньшей оо, *I* (\*о — 0) = *(* (\*„) (или / (\*ф + 0) = f (хф)), то статочно Для говорят, непрерывности равенство что функция трех функции *f* чисел:

(хф) *непрерывна f* (х) в точке *слева* хф (*справа)* необходимо в точке и до­ хф. П\*о — 0) = f (х0 + 0) = *t* (хф).

78

ОТДЕЛ I. ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ \* ций. «= 2\*. Если Непрерывность то функции функции *I* (х) и *g* элементарных *(х)* непрерывны при значении функ­ a) F М ± *g* (\*); б) *f (х) g* (х); в) также В непрерывны частности: а) при целая х = рациональная *х0.* г(\*) (g (хо)^0) функция *Р* **(***х***) =» e**0 **+** *а хх* **+ .. . + вях"**

функция иепрерывна при любом значении х; б) дробная рациональная Я (х) « a« + Qix+ • • • *+апхп*

60**+ • • • +** *Ьтхгп* стигает *рема* (а, / всех функциях. сегменте непрерывна в tgx, непрерывна дется ®= (Р) нуль. *I* Вообще 3°. Более (\*о). Р)с *(теорема* точках, о\*, значение *Вейерштрасса*); на Основные то [а, logo\*, [а, нем общий при функция при основные 6], где 6] *Коши).* своей у всех a то: они х Если (« все resin = результат < 1) нижней значениях определены. х0 *g* промежуточные В элементарные х, *f,* Y функция *(ft* 3) *(х)* < и частности, теоремы (х)) arccosx, функция Р) принимает ограничена герани следующий: непрерывна такое, х, / не обращающих знаменателя arctg функции: х, . .. xn, непрерывны sin х, cos во х, (х) *т* если *g* что непрерывна и значения *(у)* на о на верхней / / непрерывна прн (а) этом если непрерывных (у) каждом / — х (Р) сегменте; между = функция грани 0. на < х„. 0, интервале конечном при *М* то /(a) 2) *(тео­* / *у* най­ до­ (х) = и Для 662. данной Дан точки график *а* и непрерывной числа е > функции *у — f (х).* 0 указать геометриче­ ски | *х*—*а.* число | < *Ь.* 6 > 0 такое, что |/ (лг) — /(а)1 < е при ную 663. пластинку, Требуется сторона пределах если *у0* = площадь допустимо ее *у* 100 см2 не больше *—* изготовить изменять *хг* может которой сторону металлическую отличаться *х0* = *х* этой 10 от см. пластинки, проектной В квадрат­ каких чем а) на ± 1 см\*; б) на± 0 ,1 см\*; в) на ± 0 ,0 1 см\*; г) на ± е см2? 664. Ребро куба заключается между 2 м и 3 м. С ка­ кой ребро абсолютной *х* этого куба, погрешностью чтобы объем Д его допустимо *у* измерите можно было вы­ числить с абсолютной погрешностью, не превышающей в м3, если: а) е = 0 ,1 м3; б) е = 0 ,0 1 м3; в) е = 0,001 м3? 665. В какой максимальной окрестности точки х# = чается 100 ордината от ордння« 1 графика *у0* = функции *у — л/х* отли­ 1 0 меньше чем на е = 1 0^\*

$ 7. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ 79 *(п* > 0)? Определить размеры этой окрестности при *п* = 0 , 1 , 2 , 3. 666. С помощью «е—6»-рассуждений доказать, что функция / *(х)* \*= *х*2 непрерывна при *х* = 5. Заполнить следующую таблицу:

в 1 0,1 0,01 0,001 \* « «

в667. Пусть *f (х) ~ ~* и в 0 ,001. Для значений *х0* = 0 ,1 ; 0 ,0 1} 0 ,001; . . . найти максимально большие положительные числа в - в (е, *х0)* такие, чтобы из неравенства | *х*—*х0*1 < б вытекало бы неравенство I / W - / W K \* . Можно ли для данного *г —* 0,001 выбрать такое 6 > 0 , которое годилось бы для всех значений *х0* из интервала (0 ,1), т. е. такое, что если *\х*—х0 |<б, то |/ *(х)* — / (хв) | < 1 е, каково бы ни было значение 6 (0,1)? 668. Сформулировать на языке «е—б» в положитель­ ном смысле следующее утверждение: функция / *(х),* определенная в точке х„. не является непрерывной в этой точке. 669. Пусть для некоторых чисел е > 0 можно найти соответствующие числа о = 6 (е, дг0) > 0 такие, что |/ (дг) — / *(х„)* | < е, если только |*х*—*х0*1 < б. Можно ли утверждать, что функция / *(х)* непрерывна в точке *х0,* если: а) числа е образуют конечное множество; б) числа в образуют бесконечное множество двоичных дробей *е* =» *~ (п* = 1 , 2 . .. .). 670. Пусть дана функция /(\*) = •\* + 0,001 1х]. Показать, что для каждого е > 0,001 можно по­ добрать б = б (е, *х)* > 0 такое, что | / *(х')* — / (\*) | < е, если только | *х'*—*х* | < б, а для 0 < е < 0,001 для всех значений *х* этого сделать нельзя. В каких точках нарушается непрерывность этой функции? 671. Пусть для каждого достаточно малого числа б > 0 существует в = е (б, *х0)* > 0 такое, что если

80 ОТДЕЛ I ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ | *х—х0*1 < б, то выполнено неравенство | *f (х)* — *f (х0)* |<е. Следует ли отсюда, что функция *f* (*х*) непрерывна при *х тт х0?* Какое свойство функции / (х) описывается дан­ ными неравенствами? 672. Пусть для каждого числа е > 0 существует число 6 = 6 (е, *х0)* > 0 такое, что если | *f (х)* — *f (х0)* |<е, то *\х*—х01 < 6 . Следует ли отсюда, что функция *f (х)* непрерывна при значении *х = х0?* Какое свойство функ­ ции описывается этими неравенствами? 673. Пусть для каждого числа 8 > 0 существует число е = е (6 , *х0)* > 0 такое, что если | / *(х)* — *f (х0)* |<е, ТО | *Х— Хд* | < 6. Следует ли отсюда, что функция / (лг) непрерывна при *х — х0?* Какое свойство функции *f (х)* описывается данными неравенствами? Рассмотреть пример:

arctg х, если *х* рационально, я —arctg *х,* если *х* иррационально. 674. С помощью «е—6»-рассуждений доказать не­ прерывность следующих функций: а) *ах* + *Ь;* б) *х\*}* **в)** х3; г) У\*"■ д) *у^х* ; е) sin х; ж) cos *х\* з) arctg *х.*

Исследовать на непрерывность и изобразить графи­ чески следующие функции:

675. *t* (х) = | лг |.

676. *f(x) =* --------, если *хф2\ х — 2А,* если х=2.

677. /(х) = -----1-----. если *хф* —1 и *f(* — 1)—про- (1 + х)! извольно.

678. a) *fx (х) =* I I, если *хфО* и *h* (0) = 1; I 1\*1 I б) *ft* (\*) = sin \* , если *хфО* и /а (0) — 1. 1^1 679. [(\*) — Sin-L, если *хфО* и /(0)—произвольно.

680. / *(х)* =\* jcsin -5-, если *хфО* и / (0) = 0.